

# FÍSICA GENERAL II:

## APUNTES DE ELECTROMAGNETISMO

### 1. El campo electrostático

#### 1.1 La carga eléctrica:

- Atributo de la materia (protones+electrones)
- Base del electromagnetismo
- Los griegos descubrieron (600 A.C.) que al frotar el ámbar (*elektron* el griego) con la lana, éste podía atraer ciertos objetos.

#### Propiedades:

- Dos tipos (+) y (-).
- Cargas del mismo signo se repelen y distinto signo se atraen.
- Está cuantizada  $\Rightarrow$  múltiplo de  $\pm e$  (+e carga del protón, -e carga del electrón). Carga de un objeto  $Q = \pm Ne$  (pero  $N$  es muy grande por lo que la cuantización a nivel macroscópico es imperceptible).

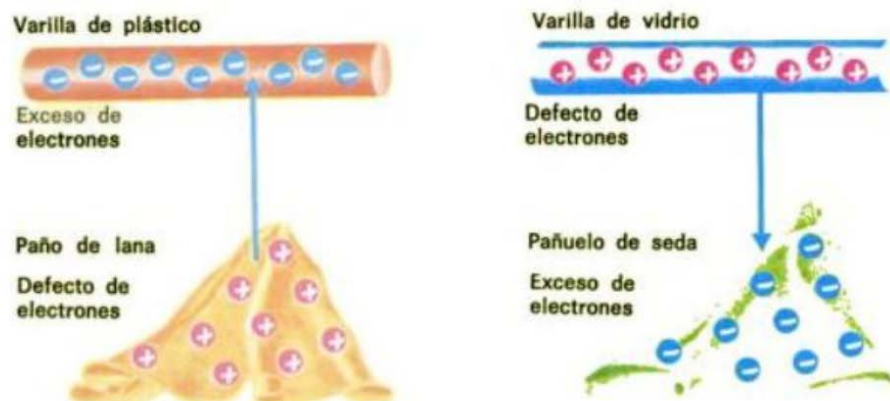
(Los quarks tienen carga  $\pm 1/3e$ ,  $\pm 2/3e$  pero no se observan de forma aislada)

- La carga eléctrica de un sistema aislado se conserva: **ppio. de conservación de la carga.**

Al frotar el vidrio con la seda  $\Rightarrow$  se transfieren electrones del vidrio a la seda:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{vidrio (+) defecto de electrones} \\ \text{seda (-) exceso de electrones} \end{array} \right.$$

La carga neta es la misma (no se destruye, sino que se transfiere de un cuerpo a otro: *carga por frotamiento*)



**La serie triboeléctrica** ordena los materiales en función de su facilidad para perder electrones cuando se frotran con otros. Por ejemplo, si se frota la seda con el vidrio ésta se carga negativamente, pero si se frota con ámbar se cargará positivamente.

<i>Serie triboeléctrica</i>	
Piel de conejo	+
Vidrio	Tendencia a perder electrones
Cabello	
Nylon	
Lana	
Seda	
Papel	
Algodón	
Madera	
Ámbar	
Plástico	
....	-

- Unidad en el SI es el *culombio* (C), definido a través de *I* “cantidad de carga que fluye por la sección transversal de un cable en un segundo, cuando por éste fluye una corriente de 1 A”  $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$

Tabla I: Carga y masa de las partículas fundamentales

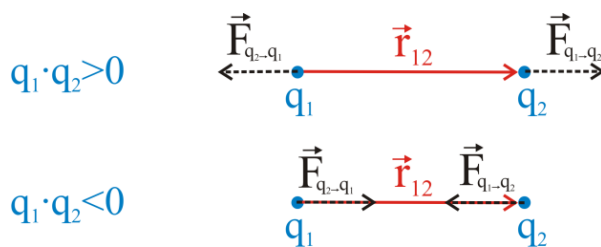
	Carga (C)	Masa (Kg)
Electrón	$-1.602 \times 10^{-19}$	$9.109 \times 10^{-31}$
Protón	$+1.602 \times 10^{-19}$	$1.673 \times 10^{-27}$
Neutrón	0	$1.675 \times 10^{-27}$

## 1.2 Ley de Coulomb:

Experimento de Coulomb (1784) → utilizó una **balanza de torsión** para medir la fuerza entre dos cargas puntuales<sup>1</sup>  $q_1$  y  $q_2$ .

**Ley de Coulomb:** “la magnitud de la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de las cargas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa”. Además, dicha la fuerza está dirigida a lo largo de la línea que las une.

### Fuerza entre dos cargas puntuales:



$$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \hat{r}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \vec{r}_{12} \quad (1)$$

Siendo  $K$ , la constante de Coulomb, calculada experimentalmente:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.975 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \approx 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

$$\epsilon_0 \text{ permitividad del vacío (rel. con la velocidad de la luz): } \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

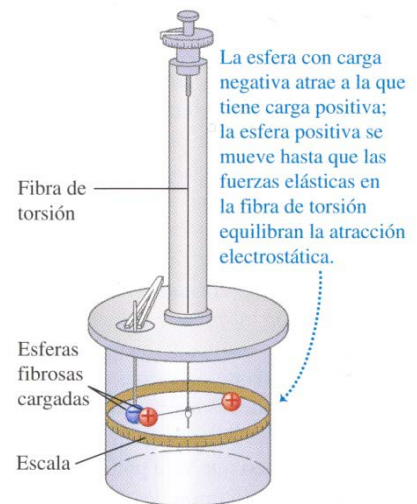
La ley de Coulomb es similar a la *ley de Newton de la Gravedad*:  $\vec{F}_{m_1 \rightarrow m_2} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \hat{r}_{12}$

¡aunque  $G$  es del orden de  $10^{-11} \text{ m}^3(\text{Kg} \cdot \text{s}^2)$ , esto es unas  $10^{20}$  veces menor que  $K$ !

(p. ej. la repulsión eléctrica entre 2 protones es  $10^{35}$  veces mayor que su atracción gravitatoria)

- 1 C unidad muy grande → carga de  $6 \cdot 10^{18}$  protones/electrones. Dos objetos con una carga de 1 C y separados 1 m sufrirían una gran repulsión.
- Fuerza debida a varias cargas: principio de superposición.

a) Balanza de torsión del tipo utilizado por Coulomb para medir la fuerza eléctrica



<sup>1</sup> Cargas de tamaño despreciable.

### 1.3 El campo electrostático (constante, creado por cargas en reposo):

El campo electrostático en un punto es la *fuerza por unidad de carga* que una carga experimenta en dicho punto.

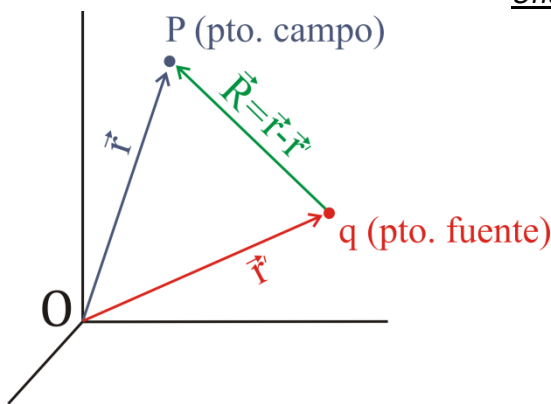
La carga prueba  $q_0$  ha de ser muy pequeña para que su presencia no modifique el campo que deseamos medir.

Realmente, se calcula como:  $\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_{q_0}}{q_0}$  (N/C o V/m)

#### Campo electrostático creado por cargas puntuales:

Distinguiremos:

- **punto campo** (punto en donde queremos calcular el campo, esto es, en donde colocaríamos la carga prueba  $q_0$ ). Denotaremos su vector de posición mediante  $\vec{r}$
- **punto/s fuente** (punto/s donde se encuentran las cargas que crean el campo). Denotaremos su vector de posición mediante *variables primadas*  $\vec{r}'$
- Denotamos por  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$  *el vector de posición del punto campo referido a la carga fuente*



#### Una carga puntual

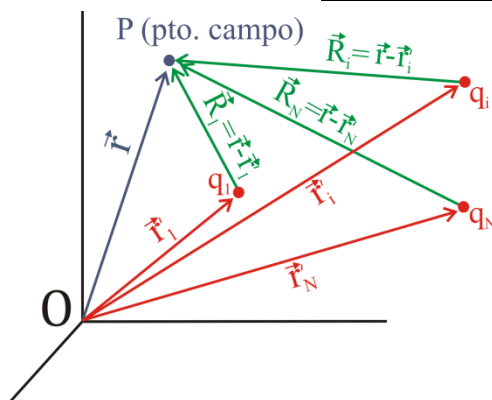
Colocamos una carga prueba  $q_0$  en P y calculamos la fuerza por la Ley de Coulomb:

$$\vec{F}_{q_0} = K \frac{q_0 q}{|\vec{R}|^2} \hat{R} = K \frac{q_0 q}{|\vec{R}|^3} \vec{R}$$

Por definición, el campo en ese punto es la fuerza por la unidad de carga:

$$\vec{E}(P) = \frac{\vec{F}_{q_0}}{q_0} = K \frac{q}{|\vec{R}|^2} \hat{R} = K \frac{q}{|\vec{R}|^3} \vec{R}$$

#### N cargas puntuales: principio de superposición

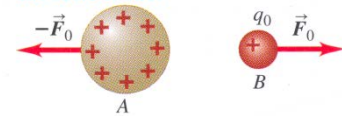


Ahora  $\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}'_i$  es el vector de posición del punto campo referido a la carga  $i$ -ésima

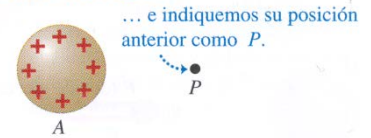
$$\begin{aligned} \vec{E}(P) &= \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(P) = \sum_{i=1}^N K \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}'_i) = \\ &= K \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{R}_i|^3} \vec{R}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{R}_i|^3} \vec{R}_i \end{aligned}$$

**21.15** Un cuerpo cargado crea un campo eléctrico en el espacio que lo rodea.

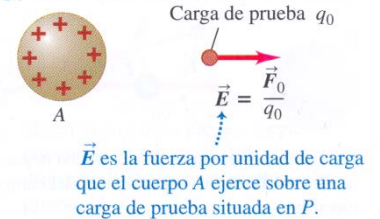
a) Los cuerpos A y B ejercen fuerzas eléctricas uno sobre el otro.



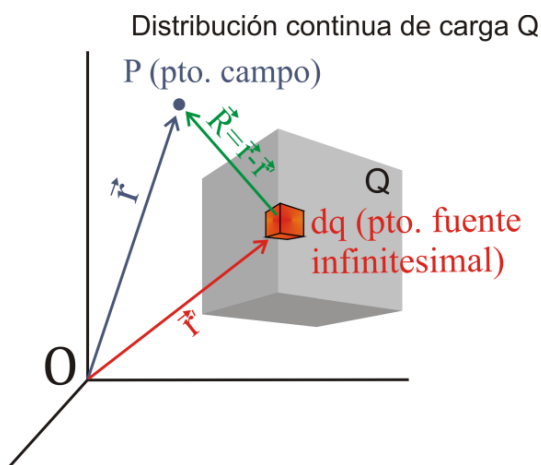
b) Quitemos el cuerpo B ...



c) El cuerpo A genera un campo eléctrico  $\vec{E}$  en el punto P.



## Campo electrostático creado por distribuciones continuas de carga:

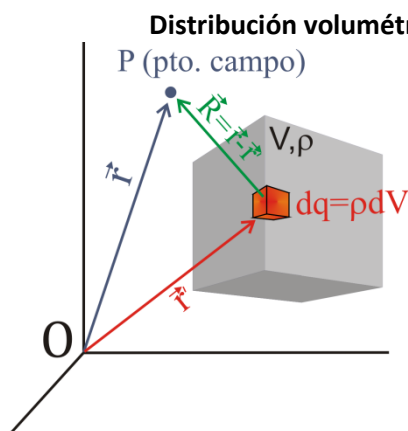


- $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$  vector de posición del punto campo relativo al elemento de carga
- Campo creado por ese elemento de carga infinitesimal (carga puntual)

$$d\vec{E}(P) = K \frac{dq}{|\vec{R}|^3} \vec{R}$$

El campo total se calcula sumando la contribución de todos los elementos de carga:

$$\vec{E}(P) = \int_Q d\vec{E}(P) = \int_Q K \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3} dq = K \int_Q \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3} dq$$



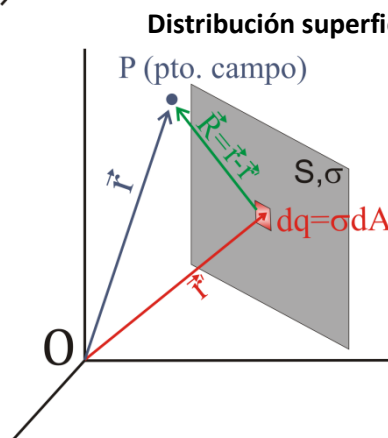
Densidad volumétrica de carga  $\rho$ :

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \text{ (C/m}^3\text{)} \Rightarrow dq = \rho dV$$

sustituyendo  $dq$ :

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3} \rho dV$$

(Distribución uniforme de carga:  $\rho = Q/V$ )



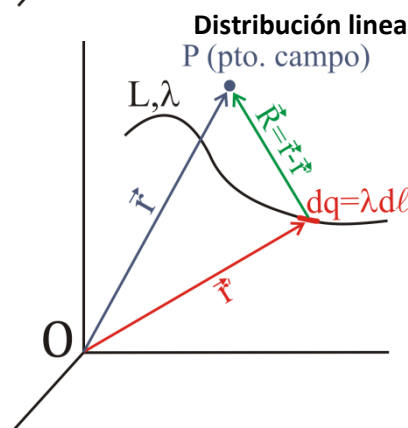
Densidad superficial de carga  $\sigma$ :

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta A} = \frac{dq}{dA} \text{ (C/m}^2\text{)} \Rightarrow dq = \sigma dA$$

sustituyendo  $dq$ :

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3} \sigma dA$$

(Distribución uniforme de carga:  $\sigma = Q/A$ )



Densidad lineal de carga  $\lambda$ :

$$\lambda = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta \ell} = \frac{dq}{d\ell} \text{ (C/m)} \Rightarrow dq = \lambda d\ell$$

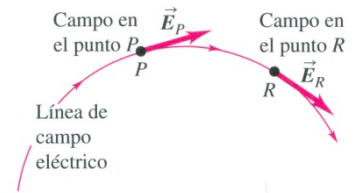
sustituyendo  $dq$ :

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3} \lambda d\ell$$

(Distribución uniforme de carga:  $\lambda = Q/L$ )

**Líneas de campo:** “línea imaginaria en el espacio de manera que su tangente en cualquier punto tiene la dirección del vector campo eléctrico en ese punto”

**21.28** La dirección del campo eléctrico en un punto cualquiera es tangente a la línea de campo que pasa por ese punto.

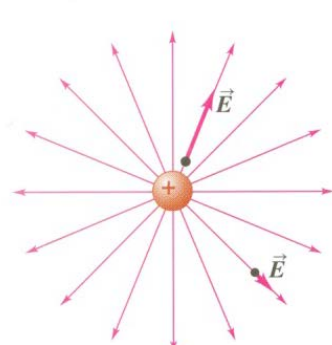


**Propiedades:**

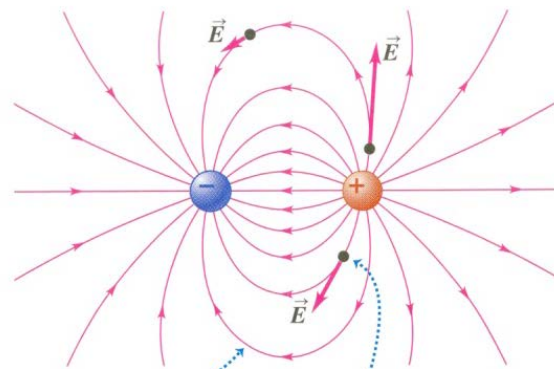
- No se cruzan (de ser así el campo tendría dos valores en un punto)
- Salen de las cargas positivas (fuentes) y entran en las negativas (sumideros)
- Miden la magnitud del campo: cuando más juntas mayor es  $|\mathbf{E}|$ . En las cargas entran/salen un n° de líneas proporcional a la carga.
- En un campo uniforme (constante en todo el espacio) las líneas de campo son rectas paralelas y uniformemente espaciadas.

**Ejemplos de líneas de campo:**

a) Una sola carga positiva



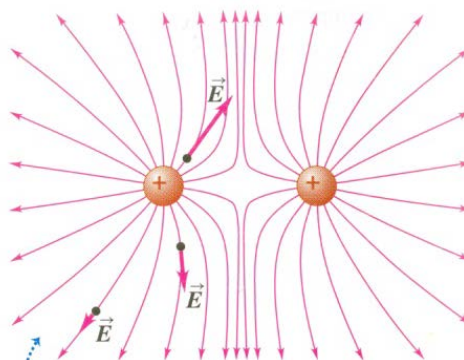
b) Dos cargas iguales y opuestas (un dipolo)



Las líneas de campo siempre apuntan *alejándose* de las cargas (+) y *hacia* las cargas (-).

En cada punto en el espacio, el vector de campo eléctrico es *tangente* a la línea de campo que pasa a través de ese punto.

c) Dos cargas positivas iguales



Las líneas de campo están muy cercanas donde el campo es intenso, y más alejadas donde el campo es más débil.

## 1.4. Potencial electrostático

### 1.4.1 Energía potencial eléctrica:

El trabajo realizado por una fuerza  $\vec{F}$  para trasladar una partícula desde el punto  $a$  al punto  $b$  está dado por

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Si la fuerza  $\vec{F}$  es conservativa, el trabajo realizado por dicha fuerza siempre puede expresarse en términos de una energía potencial  $U$

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = U_a - U_b = -(U_b - U_a) = -\Delta U \text{ (trabajo realizado por una fuerza conservativa)}$$

En un campo conservativo se conserva la energía mecánica total:

$$\underbrace{K_a + U_a}_{E_{mec,a}} = \underbrace{K_b + U_b}_{E_{mec,b}} \Rightarrow \Delta K = -\Delta U$$

Esto es, *bajo una fuerza conservativa, el incremento de energía cinética de una partícula es a costa de disminución de su energía potencial.*

- **Energía potencial eléctrica de dos cargas puntuales:**

Supongamos que tenemos una carga  $q$  estacionaria en el origen de coordenadas y vamos a calcular el *trabajo que realizaría el campo creado por esa carga para desplazar una carga prueba  $q_0$  desde el punto  $a$  hasta el punto  $b$  en dos casos:*

a) A lo largo de una línea radial

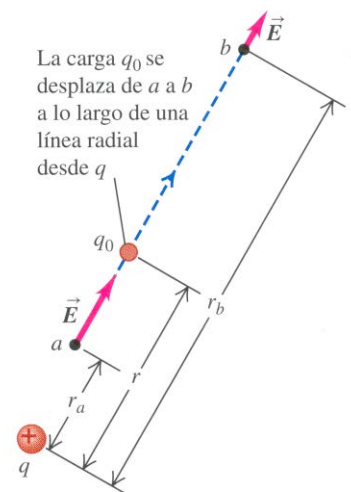
$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \underbrace{q_0 \vec{E}}_{\vec{F}} \cdot d\vec{l} = \int_{r_a}^{r_b} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

Comparando con la expresión anterior, **identificamos:**

$$W_{a \rightarrow b} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) = U_a - U_b \Rightarrow U_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r_a}, U_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r_b}$$

como la energía potencial eléctrica de esas cargas puntuales cuando la carga prueba,  $q_0$ , está en  $a$  y en  $b$ , respectivamente.

b) A lo largo de una línea arbitraria



Aunque los puntos  $a$  y  $b$  no están a lo largo de la misma línea radial, pero se obtiene el mismo resultado que antes.

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{r_a}^{r_b} q_0 E \cos \theta dl = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \underbrace{\cos \theta dl}_{dr} = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

Según la figura  $\cos \theta dl = dr$ . El trabajo realizado durante un desplazamiento pequeño  $d\vec{l}$  depende solo del cambio  $dr$  en la distancia  $r$  entre las cargas, el cual es la *componente radial* del desplazamiento. Por tanto el trabajo que efectúa sobre  $q_0$  el campo electrostático  $\vec{E}$  producido por  $q$ , solamente depende de  $r_a$  y  $r_b$  y no de los detalles de la trayectoria.

*¡El campo creado por la carga estacionaria  $q$  es conservativo!*

Por tanto, la energía potencial de dos cargas puntuales  $q$  y  $q_0$  situadas a una distancia  $r$ , se calcula como:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r}$$

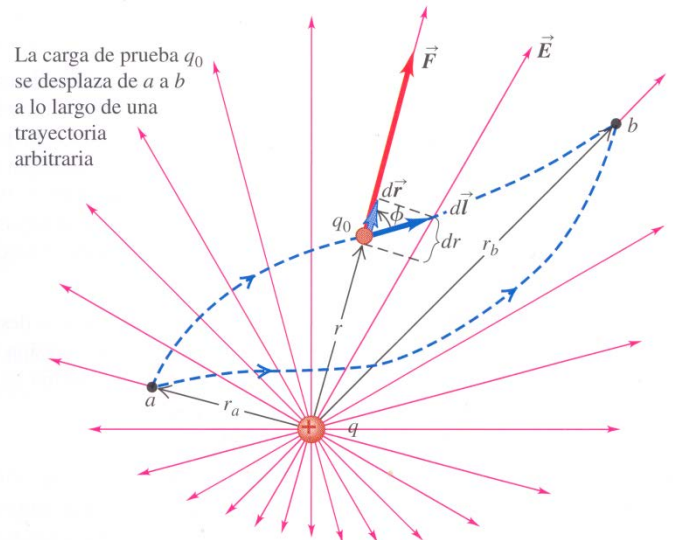
- **Energía potencial eléctrica de  $N$  cargas puntuales:**

Para calcular la *energía potencial electrostática total de un sistema de  $N$  cargas puntuales* habría que contabilizar la energía potencial implicada en la colocación de todas las cargas

(menos la primera que no requiere trabajo): 
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

(esta suma se extiende a todos los pares de cargas; no se permite que  $i=j$ , y solo se incluyen términos con  $i < j$  para garantizar que cada par de cargas se tome en cuenta una única vez)

*¡Esto se corresponde con la energía necesaria que habría que aportar al sistema para colocar las  $N$  cargas!*



### 1.4.2 Potencial electrostático:

- **Definición:**

*El potencial es la energía potencial por unidad de carga. Se define el potencial  $V$  en cualquier punto como la energía potencial  $U$  por unidad de carga asociada con una carga prueba  $q_0$  en dicho punto:*

$$V = \frac{U}{q_0}$$

- $V$  es un campo escalar.
- Su unidad en el Sistema Internacional es el Voltio ( $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$ )
- No está unívocamente definido: siempre se define respecto a algún punto de referencia en el que  $V=0 \Rightarrow$  normalmente se elige en el infinito  $V(r \rightarrow \infty) = 0$

(al potencial en un punto se le puede sumar cualquier constante arbitraria)

- **Cálculo del potencial debido a cargas puntuales:**

Consideramos una carga puntual en el origen, vamos a calcular el trabajo que realiza el campo para trasladar la UNIDAD DE CARGA desde  $a$  a  $b$ . Considerando que ahora nuestra carga prueba  $q_0=1 \text{ C}$ , la fuerza ejercida sobre dicha carga es, por definición, el campo eléctrico en ese punto, tenemos:

$$W_{a \rightarrow b}^{1C} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_a}^{r_b} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) = V_a - V_b = -\Delta V$$

(es la misma expresión que para la energía potencial pero dividiendo todo por  $q_0$ )

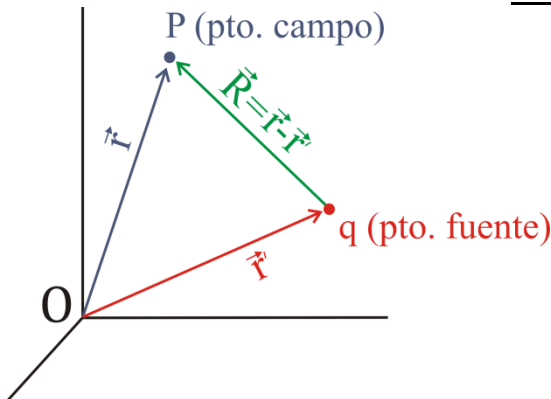
Por tanto, el potencial creado por una carga en el origen podemos ponerlo como:  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$

$$\left( \text{compárese con el campo creado por una carga en el origen } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \right)$$

¿Cómo es el potencial si la carga no está en el origen?

Cálculo del potencial: cargas puntuales

Una carga puntual

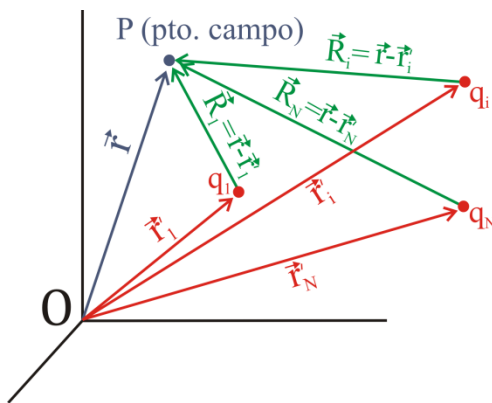


Ahora el punto campo P es el punto donde quiero calcular el potencial:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{R}|}$$

(comparar con  $\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{R}|^2} \hat{R}$ )

N cargas puntuales: principio de superposición



$$V(P) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{R}_i|}$$

Para distribuciones continuas de carga es igual:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{1}{|\vec{R}|} \rho dV \text{ (distrib. volumétrica)}$$

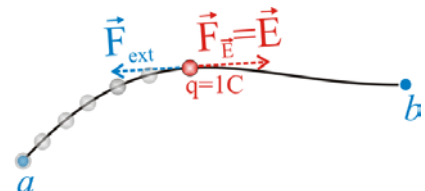
$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{1}{|\vec{R}|} \sigma dA \text{ (distrib. superficial)}$$

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{1}{|\vec{R}|} \lambda dl \text{ (distrib. lineal)}$$

• **Interpretación del potencial:**

Hemos definido  $-\Delta V = V_a - V_b$  como el trabajo realizado por el campo eléctrico  $W_{a \rightarrow b}^{1C}$  para desplazar la unidad de carga desde a hasta b:  $W_{a \rightarrow b}^{1C} = V_a - V_b = -\Delta V$

Pto de vista alternativo: para desplazar la misma carga lentamente desde a hasta b se necesita aplicar una fuerza externa  $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_E = -q\vec{E} = -\vec{E}$ .



En dicho caso, el trabajo externo realizado será:

$$W_{ext, a \rightarrow b}^{1C} = \int_a^b \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = -W_{a \rightarrow b}^{1C} = V_b - V_a = \Delta V$$

Por lo que el potencial entre dos puntos también es igual al trabajo externo que debe realizarse para llevar la carga unitaria de  $a$  a  $b$  en contra del campo  $\vec{E}$

Si escogemos  $V(r \rightarrow \infty) = 0$ ,  $V(P)$  es el trabajo externo que hay que realizar para trasladar la unidad de carga desde el infinito al punto  $P$ , o lo que es lo mismo, para colocar dicha carga en ese punto.

- **Definición del Electronvoltio (eV)**

1 Electronvoltio=1 eV es una unidad de energía: equivale al trabajo necesario para desplazar un electrón a través de una diferencia de potencial de 1V.

Dicho trabajo se puede calcular a través de la variación de energía potencial, esto es, multiplicando la carga por la diferencia de potencial:

$$W = \Delta U = q_0 \Delta V = e \cdot (1 \text{ V}) = (1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}) (1 \text{ V}) = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1 \text{ eV}$$

- **Relación entre V y el campo  $\vec{E}$**

He obtenido:

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\Delta V \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV$$

En coordenadas rectangulares podemos poner:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k} \\ d\vec{l} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k} \end{array} \right\} \Rightarrow dV = - \underbrace{(E_x dx + E_y dy + E_z dz)}_{\substack{\text{Producto escalar} \\ \vec{E} \cdot d\vec{l}}}$$

de donde:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{E} = -\left( \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \right) = -\nabla V$$

Conclusiones:

- El campo electrostático es el gradiente negativo de  $V$  ( $\vec{E} = -\nabla V$ ), por lo que las líneas de  $\vec{E}$  apuntan en la dirección en la que disminuye con más rapidez

Si colocamos una carga  $q_0$  en el seno de un campo electrostático, ésta se desplazará de forma que disminuya su energía potencial asociada: si la carga es positiva se desplazará en la dirección de  $\vec{E}$  (dirección en la que el potencial

disminuye), mientras que si es negativa se desplazará en la dirección contraria a  $\vec{E}$ .

- Sobre la arbitrariedad de  $V$ : si tenemos una función potencial  $V$  y otra función potencial  $V'=V+cte$ , el campo asociado a ambas sería idéntico, puesto que al derivar se eliminan las constantes.

- En algunos problemas resulta más sencillo calcular el potencial y luego derivar para obtener el campo  $\vec{E}$ , que obtener  $\vec{E}$  directamente.

- Si calculamos el rotacional de ambos miembros de la expresión  $\vec{E} = -\nabla V$  tenemos:

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times (-\nabla V) = 0 \text{ (el rotacional de un gradiente es cero)} \Rightarrow$$

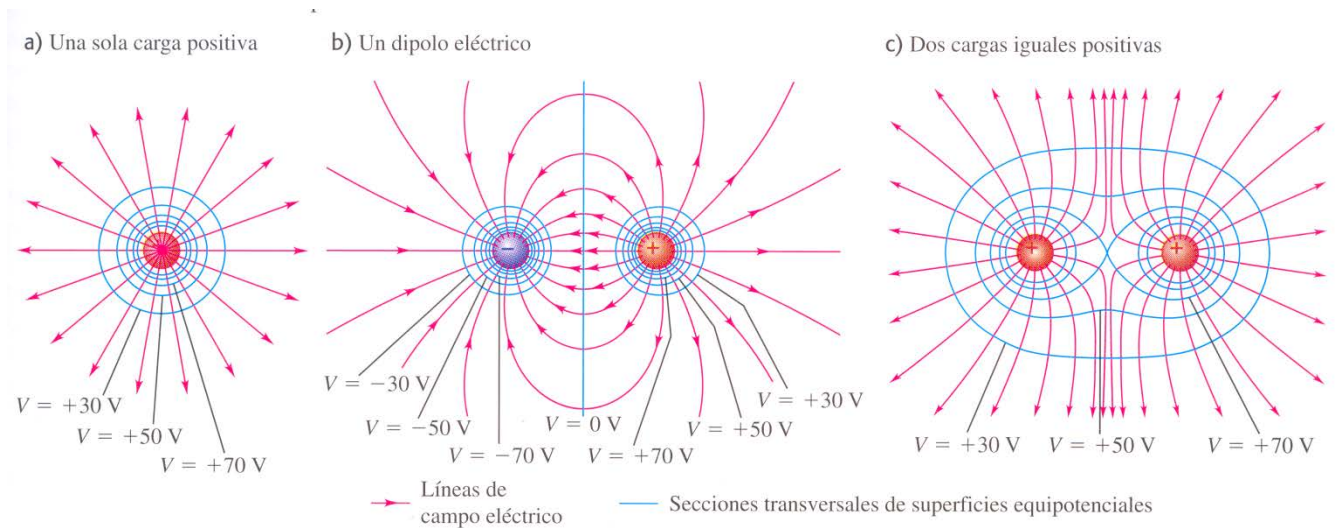
$$\nabla \times \vec{E} = 0 \text{ campo electrostático conservativo}$$

- Aquellos puntos con  $V=cte$  forman una superficie equipotencial

$$\text{Si } V = cte \Rightarrow 0 = dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{l}$$

*Esto es, las líneas de campo son perpendiculares a las superficies equipotenciales*

### Ejemplos de superficies equipotenciales

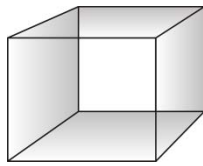


## 1.5. La Ley de Gauss

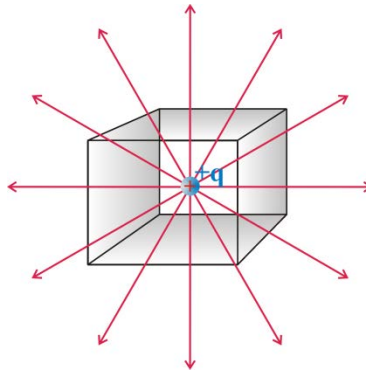
### 1.5.1 Flujo eléctrico a través de una superficie

- **Interpretación**

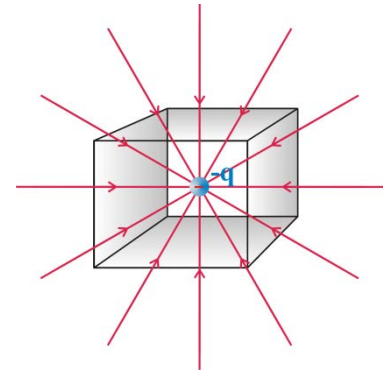
Vamos a considerar la superficie de un cubo para estimar como es *el flujo total a través de una superficie cerrada* para varias situaciones de carga.



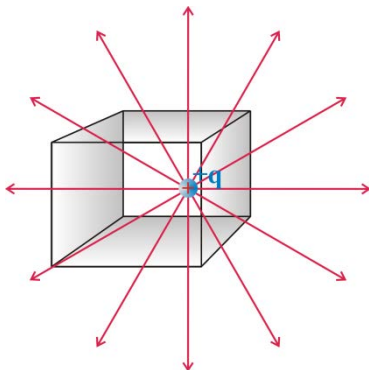
- a) Sin carga  
No hay líneas de campo  
 $\Rightarrow \phi_E = 0$



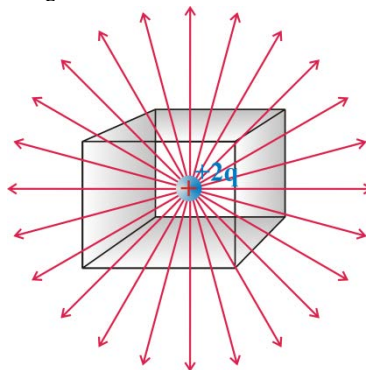
- b) Una carga +q en el centro  
Hay líneas de campo hacia afuera  
 $\phi_E$  (saliente)  $> 0$   
 $\phi_E$  (entrante)  $< 0$



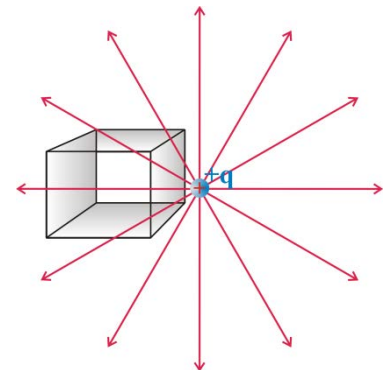
- c) Una carga -q en el centro  
*Mismo flujo en b) pero de sentido contrario*



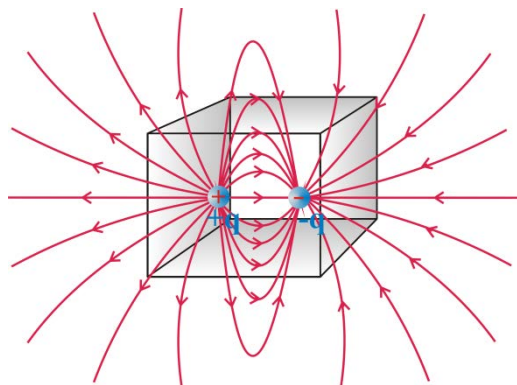
- d) Una carga +q desplazada del centro  
*mismo flujo neto que en b)*



- e) Una carga +2q en el centro  
*el doble de flujo que en b) y d)*



- f) Una carga +q fuera del cubo  
*flujo neto cero, como en a)*

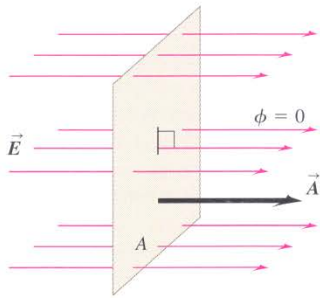


- g) Una carga +q y otra -q dentro del cubo: *flujo neto cero, como en a) y f)*

*Varias situaciones:*

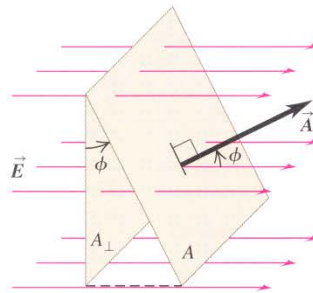
a) La superficie está de frente al campo eléctrico:

- $\vec{E}$  y  $\vec{A}$  son paralelos (ángulo entre  $\vec{E}$  y  $\vec{A}$  es  $\phi = 0$ );
- El flujo  $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA$ .



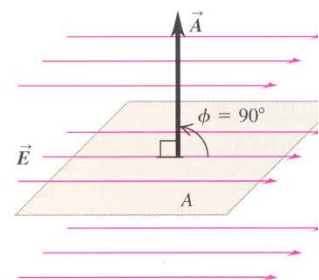
b) La superficie está inclinada un ángulo  $\phi$  respecto de la orientación de frente:

- El ángulo entre  $\vec{E}$  y  $\vec{A}$  es  $\phi$ .
- El flujo  $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \phi$ .



c) La superficie está de canto en relación con el campo eléctrico:

- $\vec{E}$  y  $\vec{A}$  son perpendiculares (el ángulo entre  $\vec{E}$  y  $\vec{A}$  es  $\phi = 90^\circ$ ).
- El flujo  $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos 90^\circ = 0$



• **Cálculo del flujo eléctrico a través de una superficie S**

$$\phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_S E dA \cos \phi$$

$\hat{n}$  vector normal a la superficie S

Convenio para su sentido:

- Superficie es cerrada:  $\hat{n}$  siempre se escoge hacia afuera (calculo el flujo saliendo)
- Superficie abierta:  $\hat{n}$  se puede escoger en dos sentidos, calculando el flujo en dicho sentido

**1.5.2 Ley de Gauss**

“El flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es igual a la carga total (neta) dentro de la superficie dividida entre  $\epsilon_0$ ”

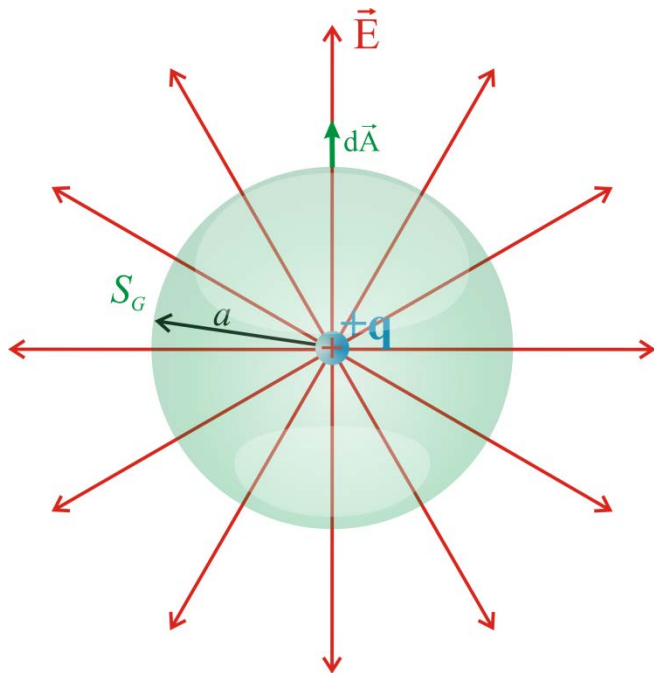
$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad \text{Ley de Gauss}$$

Si tenemos una *distribución continua de carga*, la carga encerrada se calcula como:

$$Q_{enc} = \int dq \Rightarrow \begin{cases} dq = \rho dV \rightarrow Q_{enc} = \iiint_{Vol. enc} \rho dV & \text{(dist. volumétrica)} \\ dq = \sigma dA \rightarrow Q_{enc} = \iint_{Supf. enc} \sigma dA & \text{(dist. superficial)} \\ dq = \lambda d\ell \rightarrow Q_{enc} = \int_{Linea. enc} \lambda d\ell & \text{(dist. lineal)} \end{cases}$$

Nos sirve para calcular el campo en problemas de alta simetría

- **Ejemplo: carga puntual en el origen**



Obtuvimos que el campo creado por una carga puntual  $q$  en el origen está dado por:

$$\vec{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

Para aplicación de la Ley de Gauss:

- Superficie Gaussiana ( $S_G$ ):  
superficie de una esfera de radio  $a$
- $\vec{E}(S_G) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \hat{r}$
- $d\vec{A} = dA\hat{n} = dA\hat{r}$

Calculo el flujo eléctrico a través de  $S_G$ :

$$\phi_E = \oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_{S_G} E dA = \oint_{S_G} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \right) dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \oint_{S_G} dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} (4\pi a^2) = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

## 1.6. Conductores y dieléctricos. Condensadores

**Conductores:** materiales que permiten el paso de la corriente eléctrica al tener cargas libres (electrones, huecos, etc.)

**Aislantes o dieléctricos:** materiales que no conducen la corriente eléctrica. Bajo un campo eléctrico lo suficientemente grande (*campo de ruptura del dieléctrico* → *rigidez dieléctrica*) estos materiales se ionizan convirtiéndose en conductores.

P. ej. aire seco:  $E_{\max} \approx 3 \text{ MV/m}$

### 1.6.1 Conductor cargado en equilibrio electrostático

Suponemos un conductor cargado con una carga neta  $Q$ .

**Propiedades de un conductor en equilibrio electrostático:**

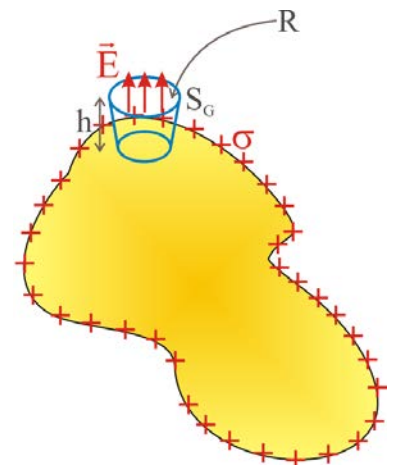
- Campo interior nulo (en caso contrario, las cargas libres del interior serían aceleradas)
- Si  $Q \neq 0$ , la carga neta se distribuye sobre la superficie (dem. por Gauss)
- Si  $Q \neq 0$ , existe un campo solamente en puntos de la superficie, pero solo tiene componente normal (la componente tangencial movería las cargas)

#### Cálculo del campo en los puntos de la superficie

- En situación de equilibrio el campo en el exterior solo puede tener componente normal y en el interior será cero.
- Escojo como superficie gaussiana  $S_G$ : cilindro de radio  $R$  y altura  $h$ , donde  $R \rightarrow 0$  y  $h \rightarrow 0$

$$\phi_E = \oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{S_{\text{tapa ext}}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{S_{\text{tapa int}}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{S_{\text{tapa lat}}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

0 porque  $\vec{E} = \vec{E}_{\text{int}} = 0$ 
0 porque  $\vec{E} \perp d\vec{A}$



Puesto que la carga encerrada en dicha superficie es  $\sigma A$ , siendo  $A$  el área de cualquiera de las tapas del cilindro, tenemos:

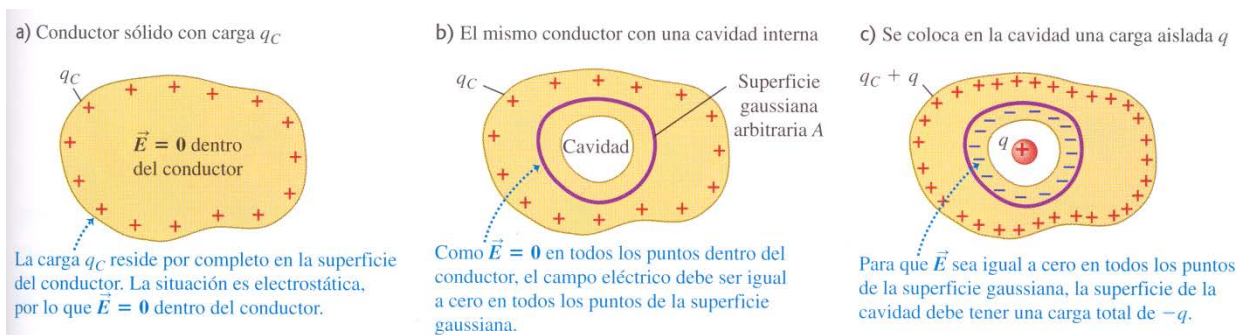
$$\phi_E = \int_{S_{\text{tapa ext}}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{S_{\text{tapa ext}}} E dA = E \int_{S_{\text{tapa ext}}} dA = EA = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$\vec{E} \parallel d\vec{A}$ 
 $R \rightarrow 0 \Rightarrow E \approx \text{cte}$

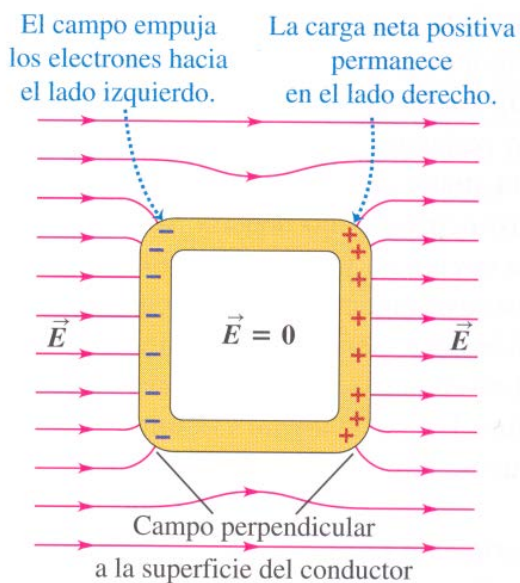
Por lo que el campo en la superficie del conductor es:  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$

**d) La superficie del conductor es una *superficie equipotencial*.**

**Varias situaciones:**



**Apantallamiento: Jaula de Faraday**



### 1.6.2 Condensadores

- Dispositivos que almacenan energía (potencial) eléctrica.
- Se construyen mediante dos conductores separados por un aislante (dieléctrico). Si se conectan a una pila, los conductores se cargan con el mismo valor de carga pero de signo contrario.
- Se utilizan en muchas aplicaciones, flashes, circuitos sintonizadores (resonantes), etc.

- **Definición de capacidad (o capacitancia)**

*“Medida de la habilidad de un condensador (o capacitor) para almacenar energía”. Solamente depende de las características eléctricas y geométricas del dispositivo. Se calcula como el cociente entre la carga almacenada bajo una diferencia de potencial:*

$$C := \frac{Q}{V} \text{ Faradio (F)} \quad 1\text{F} = 1\frac{\text{C}}{\text{V}} = 1\frac{\text{C}^2}{\text{Nm}} = 1\frac{\text{C}^2}{\text{J}}$$

*Definición de Faradio: “1 Faradio es la capacidad de un condensador que con una diferencia de potencial de 1 Voltio entre sus placas, adquiere una carga de 1 Culombio”*

Normalmente el Faradio es una unidad muy grande por lo normalmente que se utilizan submúltiplos de ésta como  $1\mu\text{F} = 10^{-6}\text{F}$ ,  $1\text{nF} = 10^{-9}\text{F}$  o  $1\text{pF} = 10^{-12}\text{F}$ .

- **Ejemplos de condensadores**

**a) Condensador de placas paralelas (condensador plano)**

Formado por 2 placas conductoras paralelas de área  $A$  y separadas una distancia  $s$  (muy pequeña en comparación con  $A$ )

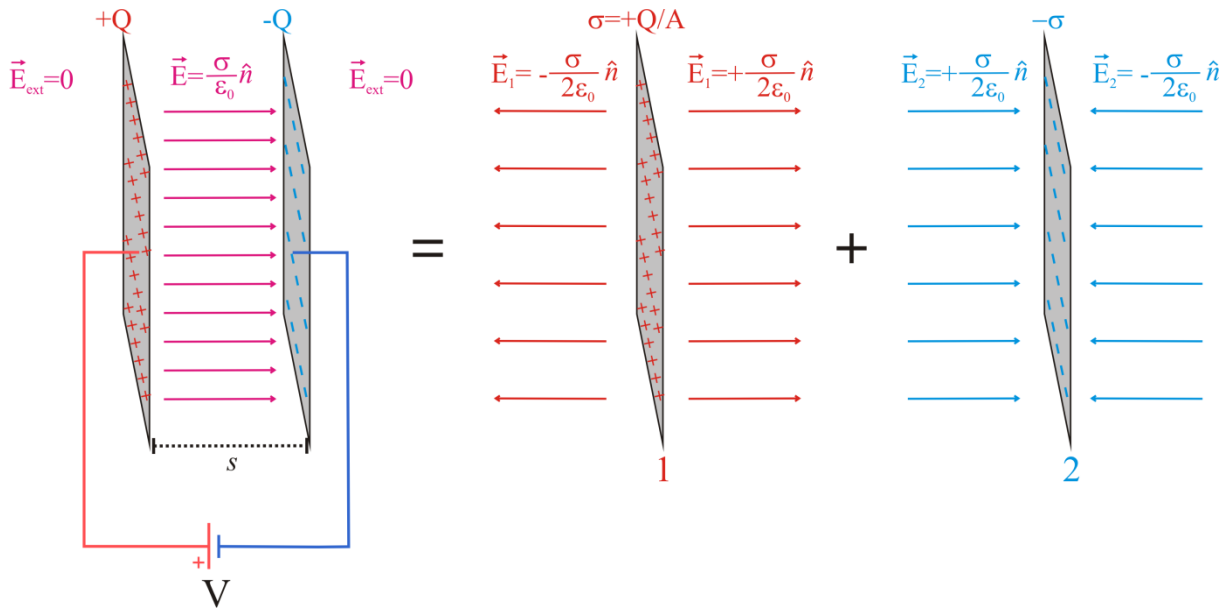
**Modelo idealizado (despreciamos efectos de borde)**

Para calcular el campo en el modelo idealizado se aplica Gauss para obtener el campo de cada una de las placas, las cuales consideramos como planos infinitos con densidades de carga  $+\sigma$  y  $-\sigma$ . Si tenemos una densidad superficial de carga  $\sigma = \frac{Q}{A}$ :

$$\vec{E}_1 = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n} \text{ (placa izquierda: campo de un plano infinito con carga } +\sigma)$$

$$\vec{E}_2 = \mp \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n} \text{ (placa derecha: campo de un plano infinito con carga } -\sigma)$$

( $\hat{n}$  con sentido hacia la derecha, signo superior drcha. placa, signo inferior izqda. placa)



El campo total se obtiene por superposición:

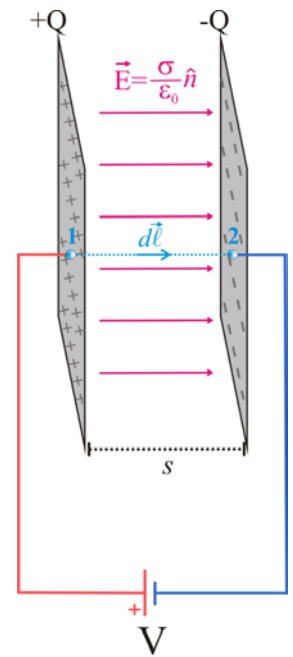
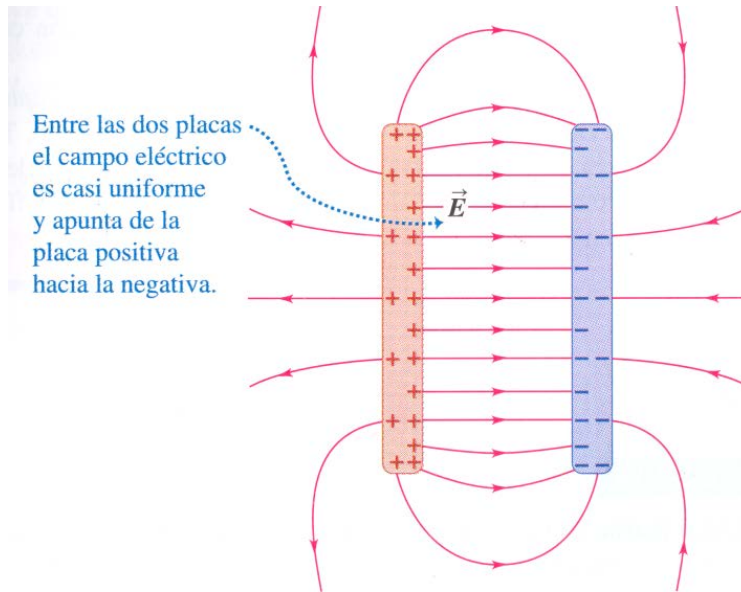
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} & \text{(interior del condensador)} \\ 0 & \text{(exterior del condensador)} \end{cases}$$

Si la diferencia de potencial entre las placas es  $V$ , como  $E$  es constante:

$$V = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 E d\ell = E \int_1^2 d\ell = Es = \frac{\sigma}{\epsilon_0} s = \frac{Q}{\epsilon_0 A} s$$

La capacidad está dada por:  $C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{\epsilon_0 A} s} = \epsilon_0 \frac{A}{s}$

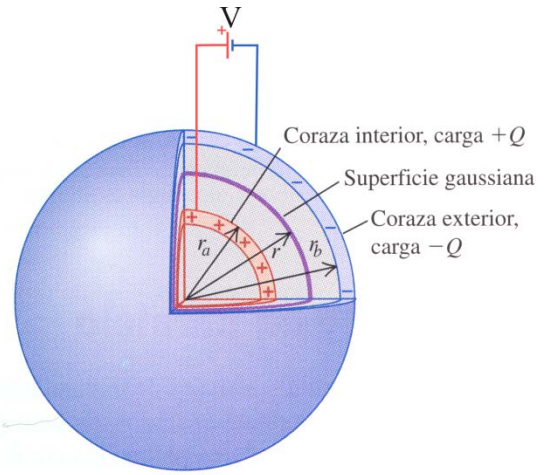
### Campo real



**b) Condensador esférico:**

Formado por dos corazas conductoras esféricas y concéntricas colocadas en el vacío de radios  $r_a$  y  $r_b$ , respectivamente.

Si lo conectamos a una diferencia de potencial de  $V$  voltios, la placa interior adquiere una carga total  $+Q$  y la exterior  $-Q$ .



El campo se calcula aplicando la Ley de Gauss:

Debido a la simetría esférica, consideramos como superficie Gaussiana una superficie esférica de radio  $r$ :

$$\phi_E = \oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_{S_G} E dA = E \oint_{S_G} dA = E A_{S_G} = E 4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{enc}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$\vec{E} \parallel d\vec{A}$      $E$  cte en  $S_G$

Si la superficie gaussiana está entre las dos placas del condensador, la carga encerrada es igual a  $Q$ , mientras que si está dentro de la placa 1 o fuera del condensador, la carga neta encerrada es 0, esto es:

$$Q_{enc} = \begin{cases} 0 & r < r_a \\ Q & r_a \leq r \leq r_b \\ 0 & r > r_b \end{cases}$$

por lo que el campo queda:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < r_a \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} & r_a \leq r \leq r_b \\ 0 & r > r_b \end{cases}$$

Ahora calcularemos el potencial entre las placas:

$$V = \int_{p1}^{p2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_a}^{r_b} \vec{E} \cdot d\hat{r} = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot d\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_a}^{r_b} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right]$$

De donde obtenemos fácilmente la capacidad de este condensador:

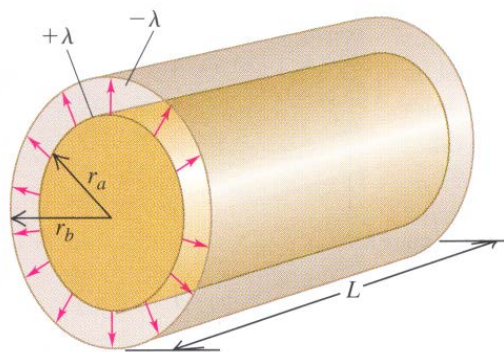
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right]} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

Caso particular:

No es necesario tener dos conductores para almacenar energía. Una sola esfera cargada almacena energía (capacitor). Su capacidad puede calcularse considerando en la expresión anterior  $r_b \rightarrow \infty$

**c) Condensador cilíndrico:**

**24.6** Un capacitor cilíndrico largo. En esta figura la densidad lineal de carga  $\lambda$  se supone positiva. La magnitud de carga en una longitud  $L$  de cualquier cilindro es  $\lambda L$ .



**1.7. Leyes del campo electrostático**

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_{enc}} \rho dV \quad \Downarrow \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Th. divergencia

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \Downarrow \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

Th. Stokes

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{A}$$

El *teorema de Helmholtz* nos garantiza que para especificar de modo unívoco un campo vectorial basta con conocer su divergencia y su rotacional en todos los puntos de una región finita.

## 2. La corriente eléctrica

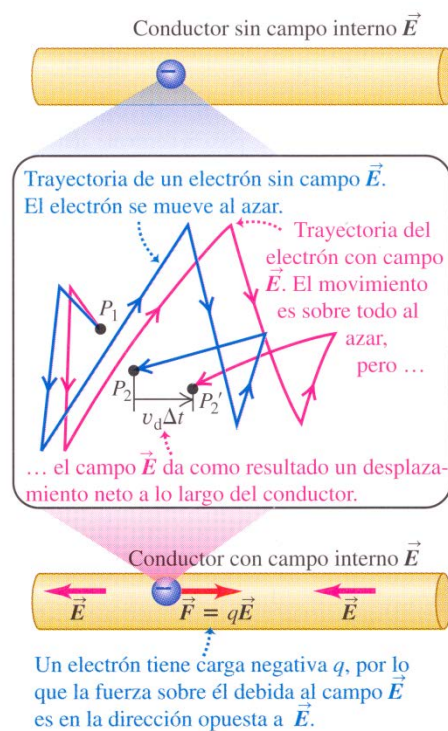
### 2.1 Introducción

“Movimiento ordenado de carga”. Solamente puede darse en materiales con cargas libres.

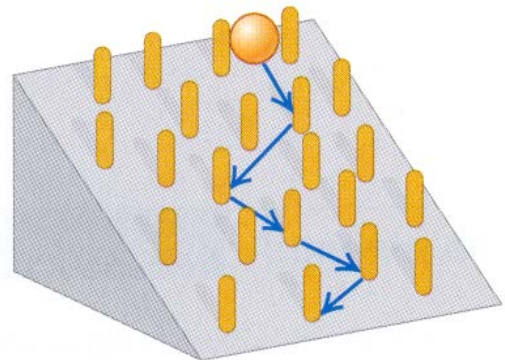
¿Qué le sucede a un conductor cuando se conecta a una batería?

1. Se establece un campo en el interior del conductor.
2. Las cargas libres del conductor adquieren un movimiento neto muy lento a velocidad  $\vec{v}_d$  (velocidad de deriva o arrastre).

$$\vec{v}_d \parallel \vec{F}_E, |\vec{v}_d| \sim 10^{-4} \text{ m/s}$$

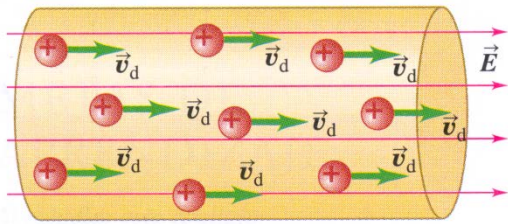


El movimiento de una pelota que rueda por un plano inclinado y rebota en las estacas que encuentra en su camino es análogo al movimiento de un electrón en un conductor metálico con un campo eléctrico presente.



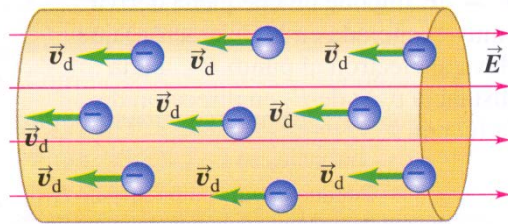
Las cargas libres de los conductores pueden ser:

**Positivas** (semiconductores tipo p, solución con iones positivos...)



Una **corriente convencional** es tratada como un flujo de cargas positivas, sin importar si las cargas libres en el conductor son positivas, negativas o ambas.

**Negativas** (semiconductores tipo n, soluciones con iones negativos, conductores metálicos)

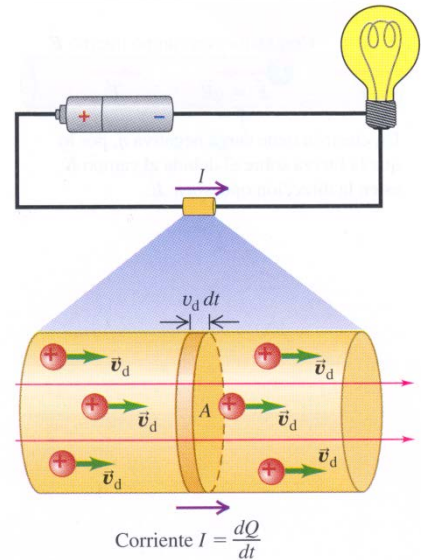


En un conductor metálico, las cargas en movimiento son electrones, pero la corriente aún apunta en la dirección en que fluirían las cargas positivas.

• **Definición de la corriente I (macroscópica):**

“La corriente a través de un conductor es la carga neta que fluye a través de su sección transversal por unidad de tiempo”  $I = dQ/dt$ .

- Convenio: aunque es un escalar, se le pone *siempre* el sentido del campo  $\vec{E}$  independientemente del sentido de movimiento de las cargas ( $\vec{v}_d$ )
- Unidad en el SI: el Amperio ( $A = 1C/s$ )  
Se define más adelante en función de la fuerza que se ejerce entre conductores recorridos por corrientes.

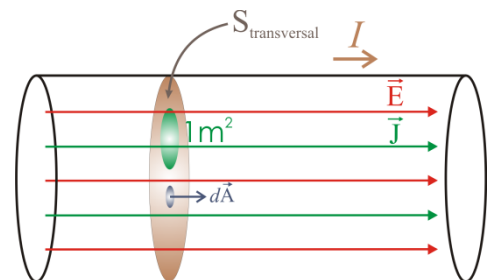


• **Definición de la densidad de corriente  $\vec{J}$  (microscópica):**

“La densidad de corriente es la corriente que fluye por unidad de área transversal”. Se distribuye por todo el volumen del conductor.

$$\vec{J} = Nq\vec{v}_d = \rho_{ch}\vec{v}_d \text{ (A/m}^2\text{)}$$

- Es un vector: tiene la dirección de ( $\vec{v}_d$ ) pero el sentido de  $\vec{E}$  (conductores l.h.i)
- $N$  nº de portadores por unidad de volumen }  $\Rightarrow Nq = \rho_{ch}$  (densidad de carga de portadores)
- $q$  carga de los portadores
- El flujo de  $\vec{J}$  a través de la sección transversal es la corriente:  $I = \int_{S_{transversal}} \vec{J} \cdot d\vec{A}$



Caso particular: Si  $\vec{J}$  es uniforme y paralelo a  $d\vec{A}$ :

$$I = \int_{S_{\text{transversal}}} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_{S_{\text{transversal}}} J dA = J \int_{S_{\text{transversal}}} dA = JA \Rightarrow J = \frac{I}{A}$$

## 2.2 Ley de Ohm

Establece la relación entre  $\vec{J}$  y  $\vec{E}$ . En los conductores lineales, homogéneos e isotrópicos (l.h.i.) la relación es:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \text{ (Ley de Ohm microscópica)}$$

$\sigma$  ( $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ =mho/m=siemens/m) conductividad del material

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \text{ (}\Omega\text{m) resistividad del material}$$

¡no confundir  $\sigma$  o  $\rho$  de este tema con densidades de carga!

- **Aplicación de esta ley:**

Tenemos un conductor de longitud  $l$ , sección transversal de área  $A$  y conductividad  $\sigma$  que conectamos a una pila de  $V$  voltios:

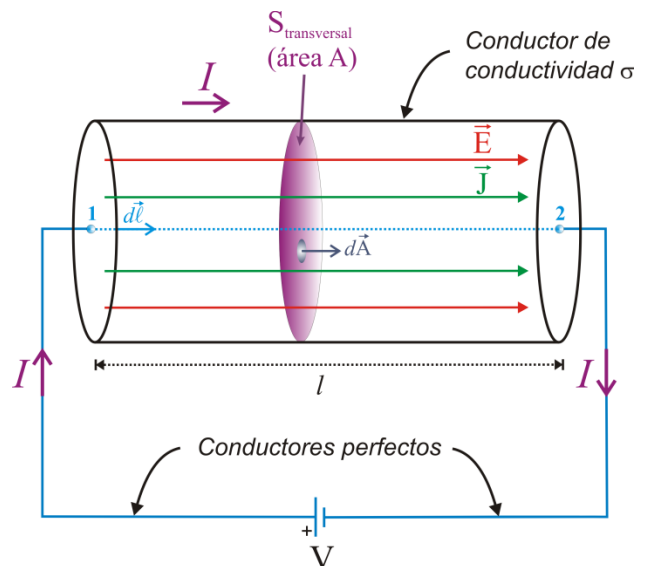
$$\left. \begin{aligned} V &= \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^l E \cdot d\ell = El \\ I &= \int_s \vec{J} \cdot d\vec{A} = J \int_s dA = JA \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V}{I} = \frac{E l}{J A}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \sigma = \frac{J}{E}$$

Sustituyendo  $E/J$  por  $\sigma$ :

$$\frac{V}{I} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{A} \Rightarrow V = \frac{l}{\sigma A} I = \frac{\rho l}{A} I \Rightarrow V = RI, \text{ } R \text{ resistencia del material (}\Omega, \text{ ohm)}$$

Que es la **Ley de Ohm** (macroscópica) que establece que, en materiales óhmicos, la relación entre el voltaje y la corriente que circula por ellos es una constante, llamada resistencia, que solo depende de las características del material. En un conductor como el del esquema, la resistencia viene dada por  $R=\rho l/A$ .



### 2.3 Ley de Joule

El trabajo para mover una carga  $q$  bajo una diferencia de potencial  $V_{ab}$  es  $q \cdot V_{ab}$ . En un intervalo  $dt$ , si por un elemento del circuito circula una corriente  $I$ , la cantidad de carga que se traslada es  $dQ=Idt$ . Por tanto el trabajo realizado en ese intervalo sería  $dW=dQ \cdot V_{ab}=Idt V_{ab}$

**La potencia eléctrica entregada a un elemento de circuito** con una diferencia de potencial de  $V_{ab}$  voltios y por el que circula una corriente de  $I$  amperios, viene dada por:

$$P = \frac{dW}{dt} = V_{ab} I \text{ (Watio = J/s)}$$

En el caso de una resistencia puesto que, por la Ley de Ohm,  $V_{ab}=IR$ :

$$P = I^2 R = \frac{(V_{ab})^2}{R} \text{ Potencia entregada a un resistor: Ley de Joule}$$

### 3. El campo magnetostático (no varía con el tiempo: creado por corrientes constantes)

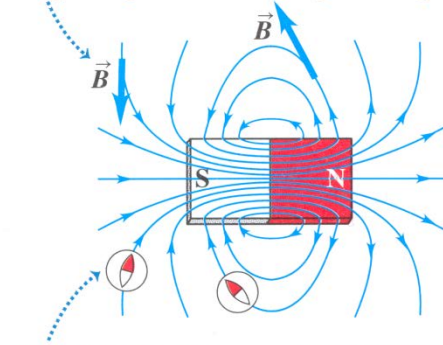
#### 3.1 Introducción

Imán: 2 polos magnéticos, polo norte (N) y polo sur (S)

En cada punto, la línea de campo es tangente al vector del campo magnético  $\vec{B}$ .

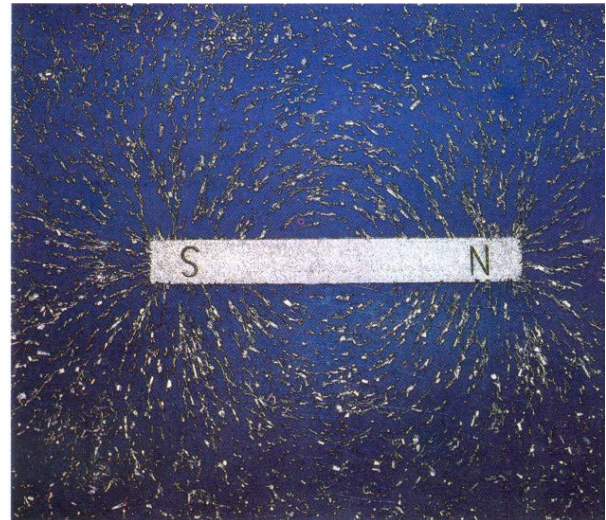
Cuanto más saturadas estén las líneas de campo, más intenso será el campo en ese punto.

Líneas de campo exteriores a una barra imanada, visualizadas por limaduras de hierro.



En cada punto, las líneas de campo apuntan en la misma dirección en que lo haría una brújula...

... por lo tanto, las líneas de campo magnético *siempre* señalan hacia fuera de los polos N y en dirección a los polos S.



**27.1** a) Dos imanes de barra se atraen cuando sus polos opuestos (N y S, o S y N) están cerca uno del otro. b) Los imanes de barra se repelen cuando sus polos iguales (N y N, o S y S) se aproximan entre sí.

a) Los polos opuestos se atraen

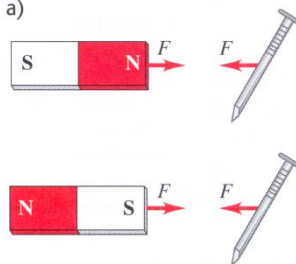


b) Los polos iguales se repelen

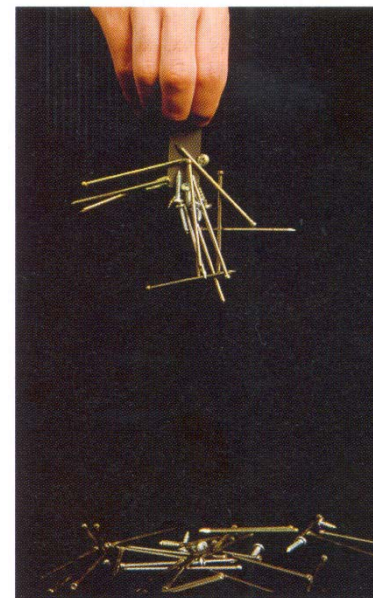


**27.2** a) Cualquiera de los polos de un imán de barra atrae a un objeto no magnetizado que contenga hierro, como un clavo. b) Ejemplo de este efecto en la vida real.

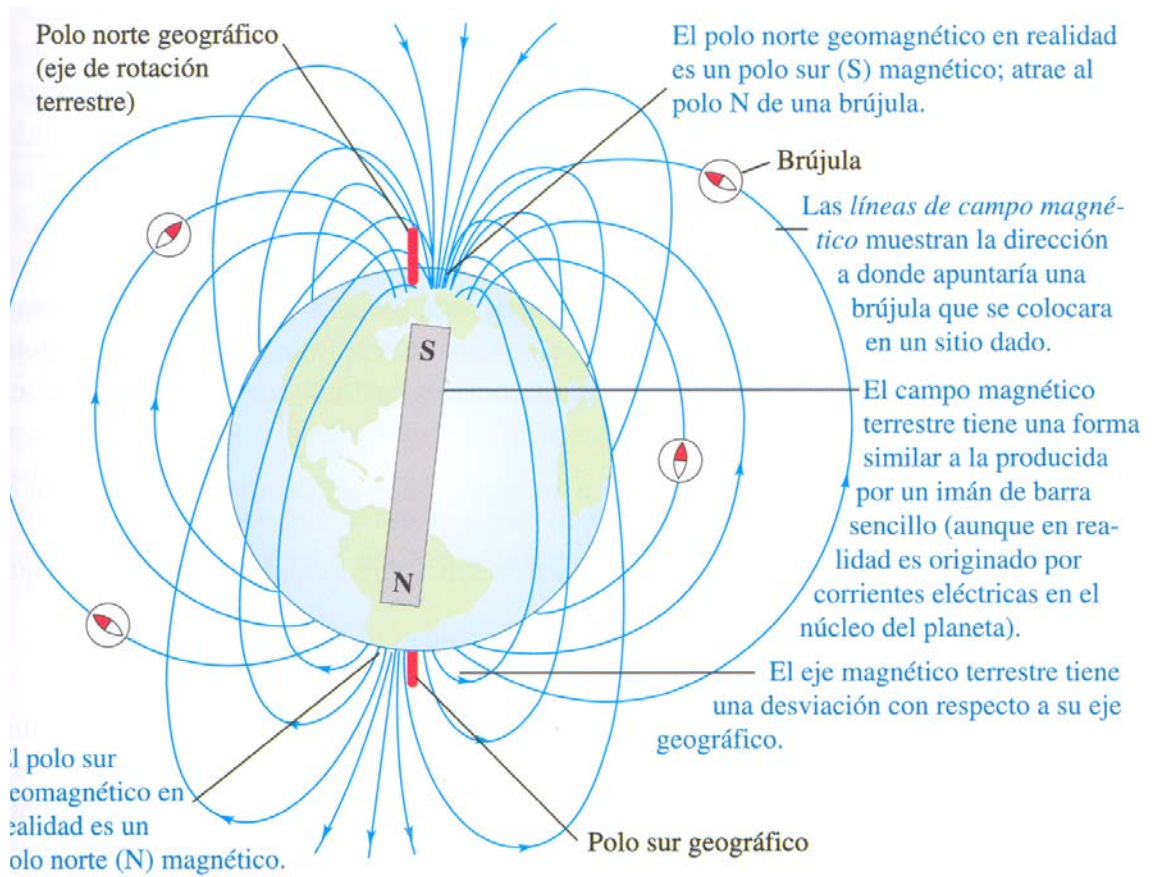
a)



b)



## Esquema del campo magnético terrestre



### 3.2 Similitudes y diferencias entre campo magnético y eléctrico

- Las interacciones magnéticas las vamos a describir a través de la *inducción magnética* o campo  $\vec{B}$ . Sus líneas de campo muestran la dirección en la que apuntaría una brújula.

Campo  $\vec{B}$  (Tesla, T)

En el sistema CGS se utiliza el gauss para medir el campo magnético:  $1 \text{ gauss} = 1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$ . El campo magnético de la tierra es de, aproximadamente, 1 G.

- El concepto de polo magnético (N o S) puede parecer similar a la carga eléctrica. Sin embargo, no hay pruebas de que exista un polo magnético aislado  $\Leftrightarrow$  *no existe monopolo magnético*

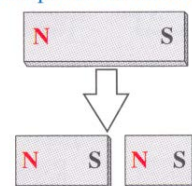
Al contrario de lo que sucede con las cargas eléctricas, los polos magnéticos siempre ocurren en pares y no es posible aislarlos.

Consecuencias (todas equivalentes):

- $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  (campo solenoidal)
- No existen manantiales ni sumideros de líneas de campo: las líneas de campo son siempre cerradas.
- El flujo de  $\vec{B}$  a través de una superficie cerrada es siempre cero.

- Similitudes y diferencias entre  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en cuanto a su origen:

Al romper un imán en dos ...



... se producen dos imanes, no dos polos aislados.

- El campo eléctrico es creado por cargas (en reposo o en movimiento).
  - El campo magnético solo es creado por cargas en movimiento (corrientes).
- Semejanzas y diferencias entre  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en cuanto a las fuerzas que ejercen:
- El campo eléctrico ejerce una fuerza sobre cualquier carga (en reposo o en movimiento).
  - El campo magnético solo ejerce fuerzas sobre cargas en movimiento.

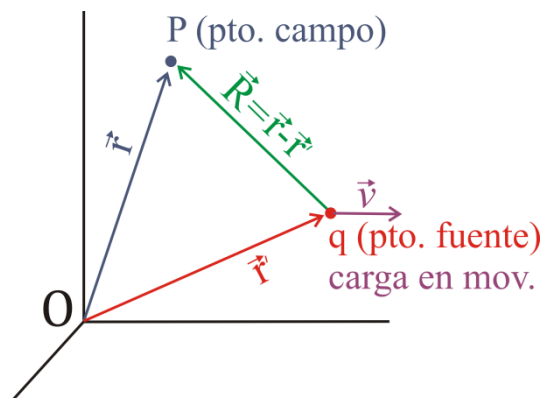
### 3.3 Cargas puntuales en movimiento ( $v=cte$ )

#### 3.3.1 Campo magnético creado por una carga puntual en movimiento

Consideramos una partícula de carga  $q$ , que se mueve a velocidad  $\vec{v}$ .

La notación es la misma que antes:

- **punto campo** (punto en donde queremos calcular el campo). Denotaremos su vector de posición mediante  $\vec{r}$
- **punto fuente** (punto donde se encuentra la carga en movimiento que crea el campo). Denotaremos su vector de posición mediante *variables primadas*  $\vec{r}'$
- Denotamos por  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$  *el vector de posición del punto campo referido a la carga fuente*



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{R}}{|\vec{R}|^3} \quad (\text{Tesla=T})$$

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{Ns}}{\text{Cm}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{Am}}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Ns}^2/\text{C}^2 \quad (\text{permeabilidad del vacío})$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ Ns}^2/\text{C}^2$$

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

Caso particular: situamos el origen del sistema de coordenadas en la carga  $\Rightarrow \vec{r}' = 0$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (\text{Tesla=T})$$

### 3.3.2 Fuerza magnética que ejerce un campo externo sobre una carga puntual en movimiento

Consideramos una partícula de carga  $q$ , que se mueve a velocidad  $\vec{v}$  en el seno de un campo magnético externo  $\vec{B}$ . La fuerza magnética sobre dicha carga será:

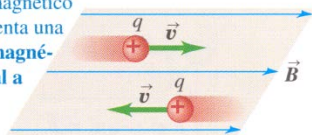
$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \text{ Fuerza magnética sobre una carga puntual en mov.}$$

Consecuencias:

- $\vec{F}_m$  es cero si  $\vec{v} \parallel \vec{B}$  (mov. de la partícula paralela al campo) o si  $\vec{v} = 0$  (partícula en reposo)
- La  $\vec{F}_m$  ejercida es perpendicular tanto a  $\vec{v}$  como a  $\vec{B}$

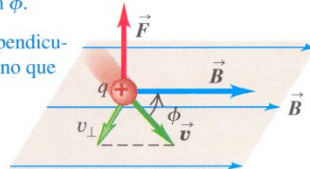
Tres ejemplos:

Una carga que se mueve en forma **paralela** al campo magnético experimenta una **fuerza magnética igual a cero**.

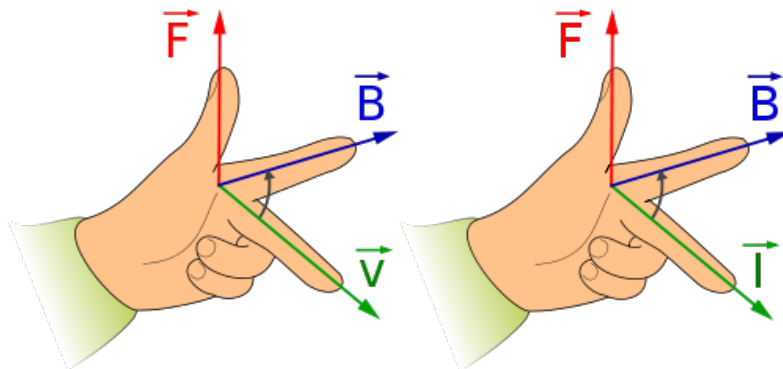
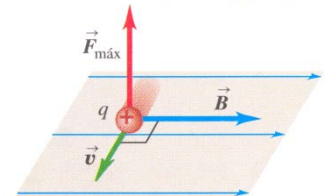


Una carga que se mueva con un ángulo  $\phi$  con respecto a un campo magnético experimenta una fuerza magnética con magnitud  $F = |q|v_{\perp}B = |q|vB \sin \phi$ .

$\vec{F}$  es perpendicular al plano que contiene  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ .



Una carga que se mueva de manera perpendicular a un campo magnético experimenta una fuerza magnética máxima con magnitud  $F_{\text{máx}} = qvB$ .



**Regla de la mano izquierda o de Fleming**

- **Fuerza de Lorentz:**

En general, si tenemos una carga  $q$  moviéndose a velocidad  $\vec{v}$  en presencia de campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , la fuerza que se ejerce sobre la carga viene dada por:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \text{ Fuerza de Lorentz}$$

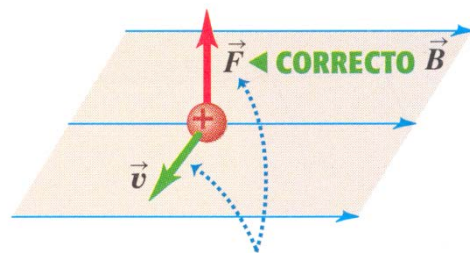
### 3.3.3 Líneas de campo magnético. Flujo magnético

- Las líneas del campo representan el campo magnético en una región del espacio. Son tangentes al vector campo  $\vec{B}$  en cada punto.
- Al contrario que las líneas de  $\vec{E}$ , las líneas del campo magnético NO REPRESENTAN la dirección de la fuerza que se ejercería sobre una carga en movimiento colocada en ese punto.

#### Las líneas de campo magnético no son “líneas de fuerza”



Las líneas de campo magnético *no* son “líneas de fuerza”. La fuerza sobre una partícula cargada no se ejerce a lo largo de la dirección de una línea de campo.

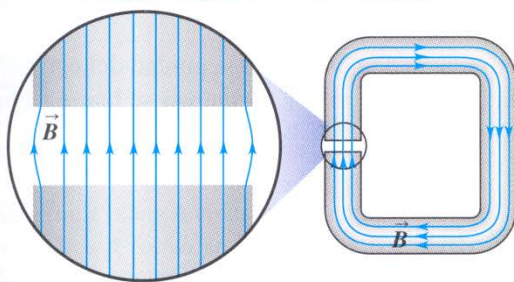


La dirección de la fuerza magnética depende de la velocidad  $\vec{v}$ , según se expresa en la ley de la fuerza magnética  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ .

#### Ejemplos de líneas de campo magnético

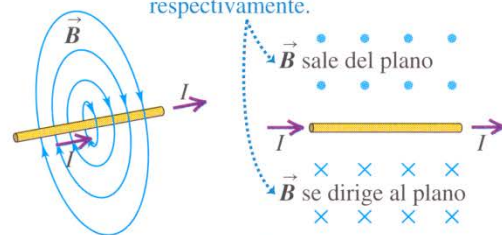
a) Campo magnético de un imán en forma de C

Entre polos magnéticos paralelos y planos, el campo magnético es casi uniforme.



b) Campo magnético de un alambre recto que conduce corriente

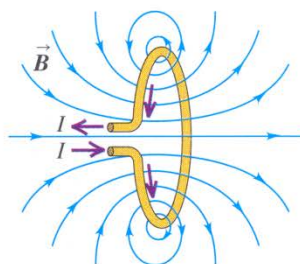
Para representar un campo que sale del plano del papel o llega a éste se usan puntos y cruces respectivamente.



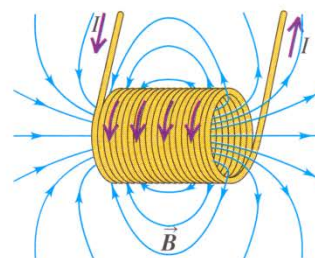
Vista en perspectiva

El alambre está en el plano del papel

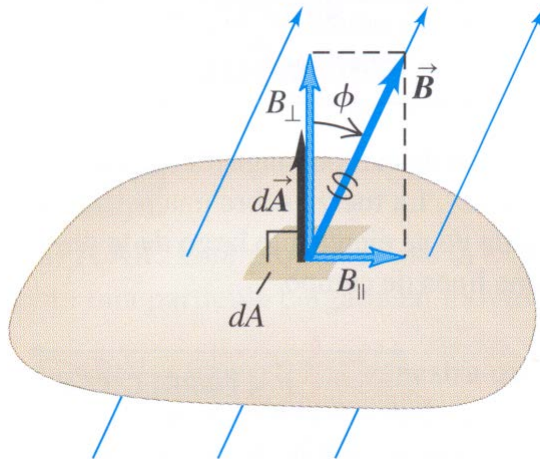
c) Campos magnéticos de una espira y una bobina (solenoides) que conducen corriente



Observe que el campo de la espira y, especialmente, de la bobina, se parecen al campo de un imán de barra (véase la figura 27.11).



• **Flujo magnético a través de una superficie:**



$$\phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_S B_{\perp} dA = \int_S B dA \cos \phi$$

Unidades del flujo magnético: Weber (1 Wb)

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ Tm}^2 = 1 \text{ Nm/A}$$

¿Qué pasa si la superficie S es cerrada?

$$\phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \stackrel{\text{Th. divergencia}}{=} \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV \stackrel{\nabla \cdot \vec{B} = 0 \text{ (campo solenoidal)}}{=} 0$$

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV$$

Teorema de Gauss para el campo magnetostático:  $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$

**3.3.4 Movimiento de partículas cargadas en un campo magnético uniforme**

Consideramos una partícula de carga  $q$ , que se mueve a velocidad  $\vec{v}$  en el seno de un campo magnético externo  $\vec{B}$  uniforme.

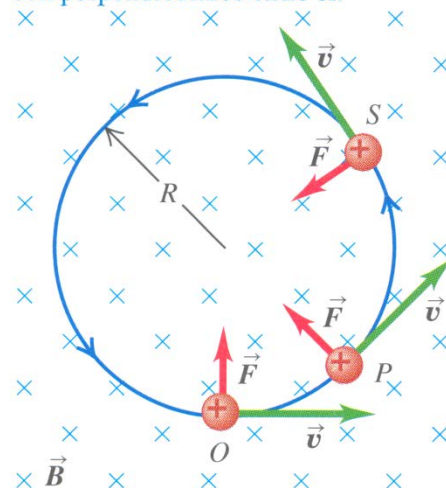
• *Caso particular:*  $\vec{v} \perp \vec{B}$

$$|\vec{F}| = |q|vB = ma_c = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{|q|B}$$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{|q|B}{m}$$

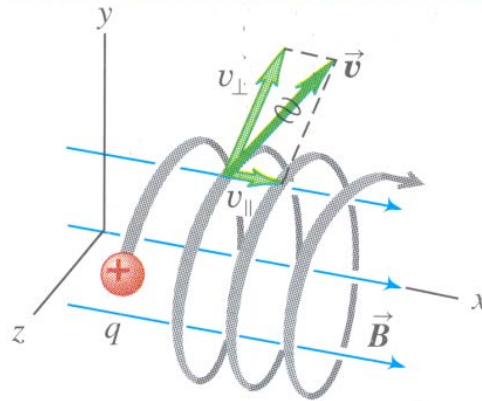
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{|q|B}{2\pi m} \text{ (frec. ciclotrón)}$$

Una carga que se mueve con ángulos rectos con respecto a un campo  $\vec{B}$  uniforme se mueve en círculo a rapidez constante, porque  $\vec{F}$  y  $\vec{v}$  siempre son perpendiculares entre sí.



- *Caso general:*

El movimiento de esta partícula tiene componentes tanto paralelos ( $v_{\parallel}$ ) como perpendiculares ( $v_{\perp}$ ) al campo magnético, por lo que se mueve en una trayectoria helicoidal.

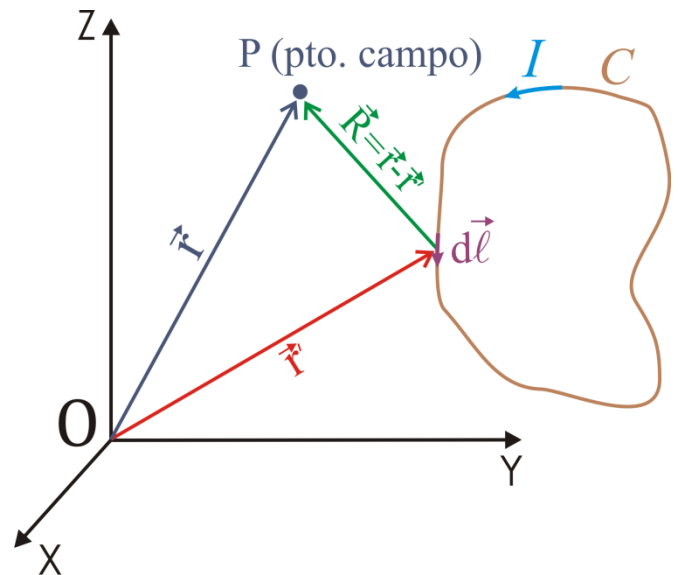


### 3.4 Circuitos recorridos por corrientes

Equivalencia entre cargas puntuales y corrientes:  $I d\vec{\ell} \equiv \frac{dq}{dt} d\vec{\ell} \equiv dq\vec{v}$

#### 3.4.1 Ley de Biot-Savart

Un circuito  $C$  recorrido por una corriente  $I$  perturba el espacio que le rodea produciendo un campo magnético  $\vec{B}$  cuya expresión es:



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{R}}{|\vec{R}|^3}$$

$\vec{r}$  vector de posición del punto campo

$\vec{r}'$  vector de posición del elemento de línea (punto fuente)

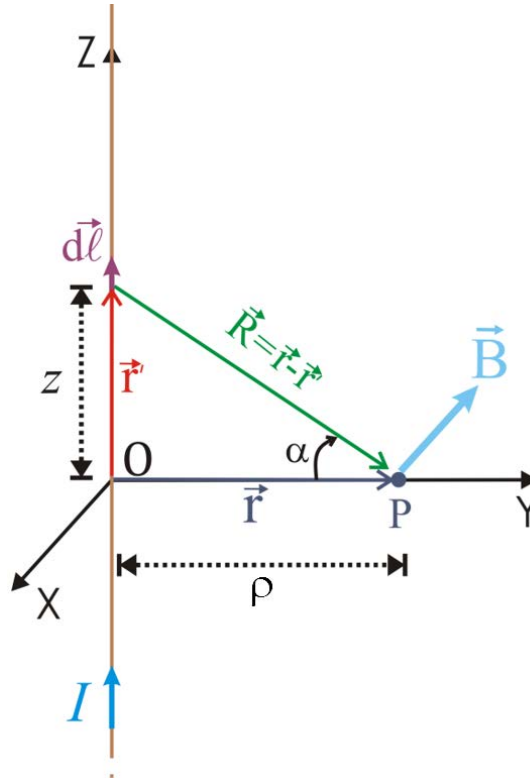
$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$  vector de posición del elemento de línea (punto fuente)

$$\left( \begin{array}{c} \text{comparar con el campo creado por una carga puntual en movimiento:} \\ \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{array} \right)$$

Nótese que  $\vec{B} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{B} \perp d\vec{l}$  por lo que el campo es perpendicular a la corriente que lo crea.

- **Ejemplo de aplicación: campo creado por un hilo recto infinitamente largo por el que circula una corriente  $I$**

Vamos a situar el hilo  $C$  a lo largo del eje  $Z$  y vamos a calcular el campo en un punto  $P$  del eje  $Y$  a una distancia  $\rho$  del hilo.



Tenemos:

$$\left. \begin{aligned} d\vec{l} &= dz\hat{k} \\ \vec{r} &= \rho\hat{\rho} \\ \vec{r}' &= z\hat{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \vec{r} - \vec{r}' &= \rho\hat{\rho} - z\hat{k} \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= [\rho^2 + z^2]^{1/2} \end{aligned}$$

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\phi} & \hat{k} \\ 0 & 0 & dz \\ \rho & 0 & -z \end{vmatrix} = \rho dz \hat{\phi}$$

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{\phi} \int_{z=-\infty}^{\infty} \frac{\rho dz}{[\rho^2 + z^2]^{3/2}} \quad (\hat{\phi} \text{ no varía con } z)$$

Resuelvo la integral mediante un cambio de variable:

$$\tan \alpha = \frac{z}{\rho}$$

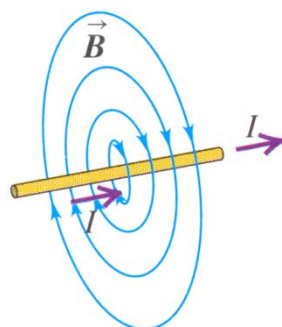
⇓

$$\begin{cases} dz = \frac{\rho}{\cos^2 \alpha} d\alpha \\ [\rho^2 + z^2]^{3/2} = [\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha]^{3/2} = \left( \frac{\rho}{\cos \alpha} \right)^3 \end{cases}$$

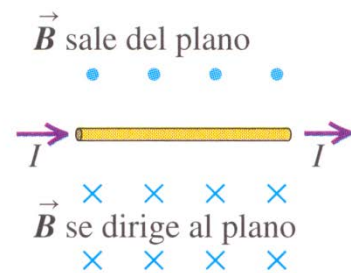
$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{\phi} \int_{\alpha=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho \frac{\rho}{\cos^2 \alpha} d\alpha}{\left( \frac{\rho}{\cos \alpha} \right)^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{\phi} \int_{\alpha=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \alpha}{\rho} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \sin \alpha \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

Por lo tanto:  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi}$

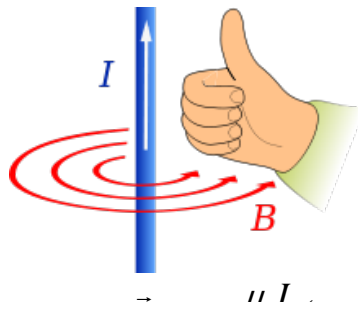
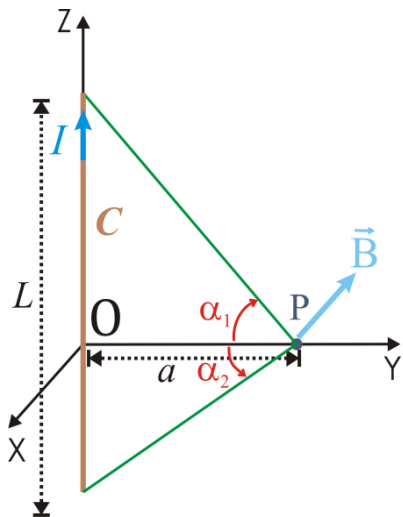
*Campo de un hilo infinito*



Vista en perspectiva



El alambre está en el plano del papel



Caso particular hilo finito de longitud L:

**Regla mano derecha:** El pulgar apunta en la misma dirección que la corriente eléctrica y los demás dedos siguen la dirección del campo magnético

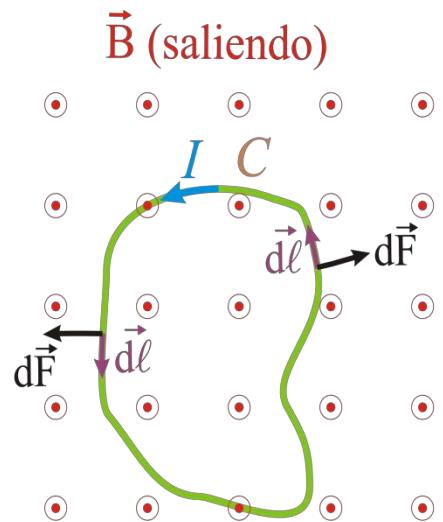
$$(\alpha_1 \geq 0 \text{ y } \alpha_2 \geq 0)$$

### 3.4.2 Fuerza que un campo B ejerce sobre un circuito por el que pasa una corriente

Tenemos un circuito C, por el que circula una corriente I. Si lo introducimos en el seno de un campo  $\vec{B}$ , ¿a qué fuerza estará sometido?

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = \oint_C I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

(comparar con la fuerza que ejerce sobre una carga puntual en movimiento  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ )



Caso particular: tramo de hilo recto con B=ccte en dicho tramo

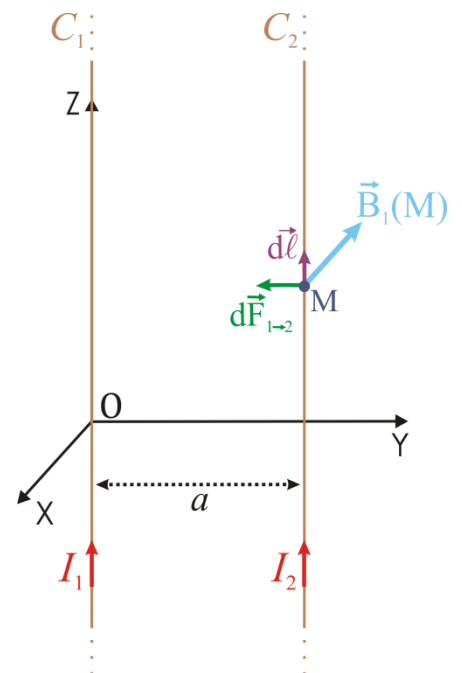
$$\vec{F}_{rect} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

• **Ejemplo de aplicación: fuerza entre dos hilos paralelos muy largos**

Fuerza que el circuito C<sub>1</sub> ejerce sobre un tramo  $d\vec{\ell} = dz\hat{k}$  del circuito C<sub>2</sub>:

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = I_2 d\vec{\ell} \times \vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dz (-\hat{j})$$

$$\left[ \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \rho} \hat{\phi} \Rightarrow \vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} (-\hat{i}) \right]$$



La fuerza por unidad de longitud de hilo:  $\frac{dF_{1 \rightarrow 2}}{dz} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \Rightarrow$  Def. Amperio

Definición Amperio (1961): “El amperio (A) es la intensidad de corriente constante que, recorriendo dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y colocados a 1 m de distancia en el vacío, se produce una fuerza entre ellos de  $2 \cdot 10^{-7}$  N por metro de longitud”

### 3.5 Ley de Ampère

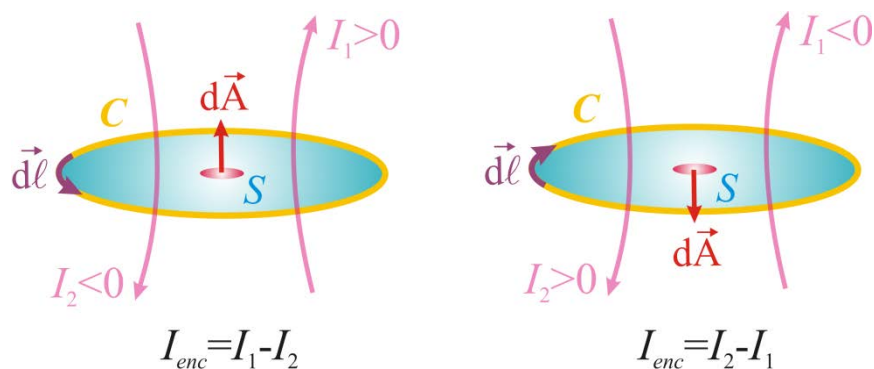
Nos sirve para calcular el campo en problemas de alta simetría:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

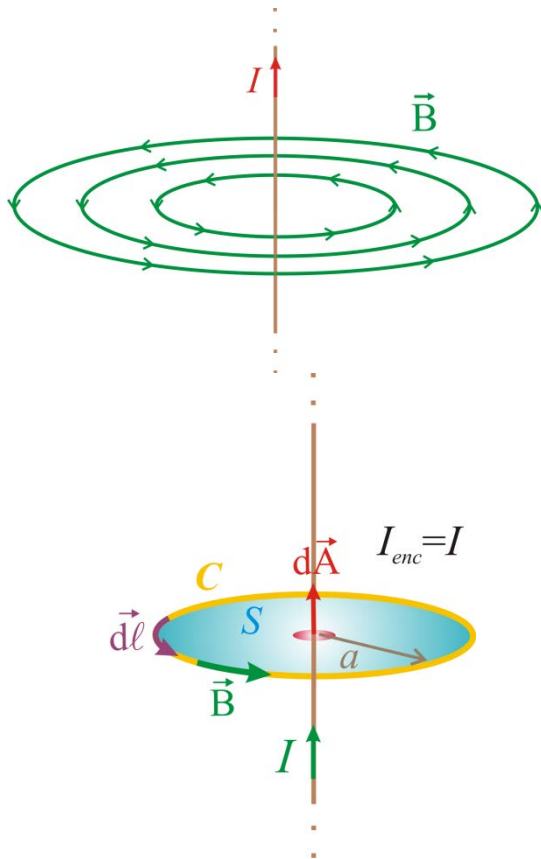
- $C$  es una línea cerrada arbitraria
- $S$  es la superficie encerrada por  $C$
- $I_{enc}$  es la corriente encerrada por  $C$  ( $\equiv$  que atraviesa  $S$ )

- **Convenio de signos para la corriente encerrada:**

El signo de la corriente encerrada (y de  $d\vec{A}$ ) depende del sentido de  $d\vec{\ell}$  (recorrido de  $C$ ) según la regla del sacacorchos:



- **Ejemplo: hilo recto de longitud infinita**



Obtuvimos que el campo creado por un hilo recto de longitud infinita por el que pasa una corriente  $I$  está dado por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

Para aplicación de la Ley de Ampère:

$C$ : circunferencia de radio  $a$

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \oint_C B d\ell = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi a} d\ell = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \oint_C d\ell \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} 2\pi a = \mu_0 I = \mu_0 I_{enc} \end{aligned}$$

### 3.6 Leyes del campo magnetostático

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0 \text{ (válida siempre)}$$

Th. divergencia

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} \Leftrightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Th. Stokes

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{A}$$

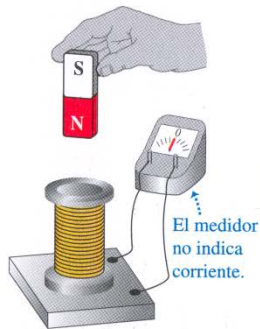
## 4. Inducción electromagnética

### 4.1 Introducción

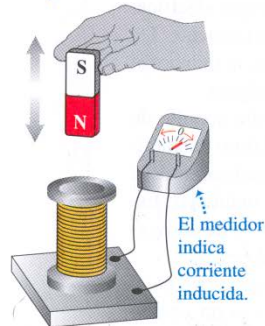
¡Los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  no son independientes!

Diversos experimentos para demostrar la existencia de la corriente inducida

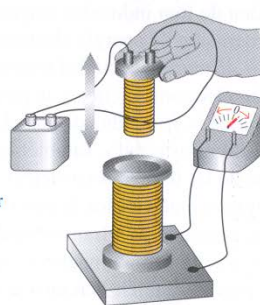
a) Un imán fijo NO induce una corriente en una bobina.



b) Mover el imán acercándolo o alejándolo de la bobina.



c) Mover una segunda bobina que conduce corriente, acercándola o alejándola de la primera.



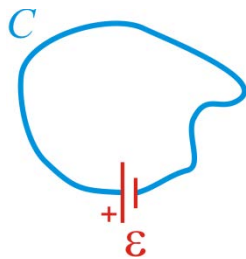
d) Variar la corriente en la segunda bobina (cerrando o abriendo el interruptor).



Todas estas acciones SÍ inducen una corriente en la bobina. ¿Qué tienen en común?\*

\*Provocan que el campo magnético a través de la bobina cambie.

- **Fuerza electromotriz en un circuito C:**

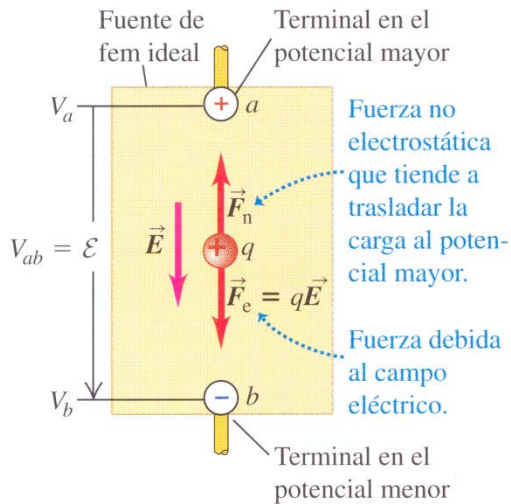


“Trabajo realizado para llevar la carga unitaria a lo largo de

$$C”: \varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

¡ $\vec{E}$  no conservativo (no electrostático)!

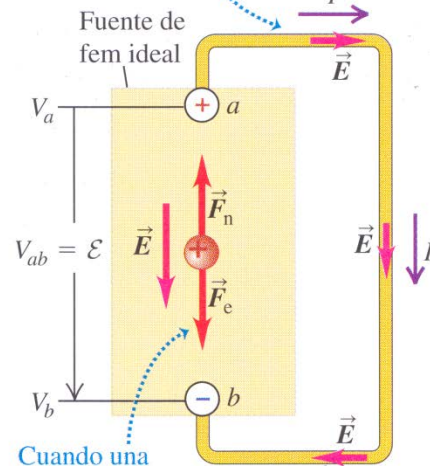
**25.14** Diagrama de una fuente de fem en una situación de “circuito abierto”. La fuerza del campo eléctrico  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  y la fuerza no electrostática  $\vec{F}_n$  se ilustran actuando sobre una carga positiva  $q$ .



Cuando la fuente de fem no es parte de un circuito cerrado,  $F_n = F_e$  y no hay movimiento neto de carga entre las terminales.

**25.15** Diagrama de una fuente ideal de fem en un circuito completo. La fuerza del campo eléctrico  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  y la fuerza no electrostática  $\vec{F}_n$  se ilustran para una carga  $q$  positiva. La dirección de la corriente es de  $a$  a  $b$  en el circuito externo y de  $b$  a  $a$  en el interior de la fuente.

El potencial a través de las terminales crea un campo eléctrico en el circuito, lo que hace que la carga se desplace.



Cuando una fuente real (opuesta a la ideal) de fem se conecta a un circuito, disminuye,  $V_{ab}$  y por lo tanto  $F_e$ , de manera que,  $F_n > F_e$  y  $\vec{F}_n$  realiza un trabajo sobre las cargas.

## 4.2 Ley de Inducción de Faraday

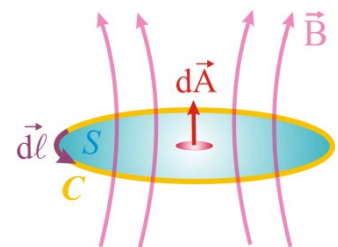
“La fuerza electromotriz inducida en una espira cerrada es igual a menos la variación del flujo magnético a través de dicha espira”

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (\text{Ley de Inducción de Faraday})$$

- Relaciona  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ :  $\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$

- Si  $C$  es un conductor de resistencia  $R$ :  $I_{ind} = \frac{\varepsilon}{R}$

Flujo magnético a través de una espira  $C$



- **Caso particular: C estacionario**

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \\ \text{Por el th. de Stokes } \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= \int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Nota: si  $\vec{B} \neq \text{cte} \Rightarrow \nabla \times \vec{E} \neq 0 \Rightarrow \vec{E}$  no conservativo!

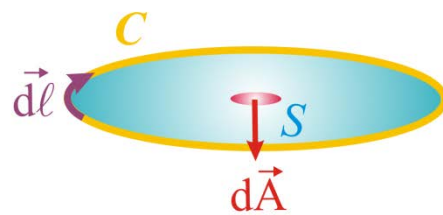
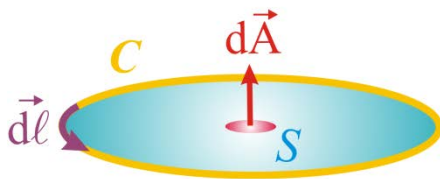
- **Ley de Lenz:**

Ley de Lenz: “La dirección de cualquier efecto de inducción magnética es tal que se opone a la causa que lo produce”

Procedimiento para conocer el sentido de la corriente inducida:

- Impongo un sentido para recorrer  $C$ . Dicho sentido me impone el sentido para  $d\vec{A}$  (regla del sacacorchos) y por tanto me define el signo del flujo magnético.

*Flujo hacia arriba positivo*



*Flujo hacia abajo positivo*

- Calculo el flujo magnético:  $\phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$

- Calculo la f.e.m. inducida:  $\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$

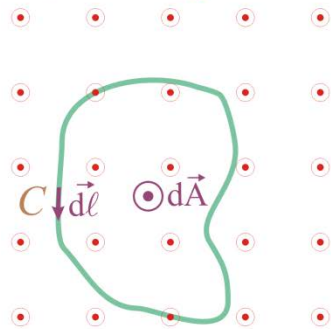
- *Criterio de signos (matemático) para el sentido de la corriente inducida:*

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon > 0 &\Rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} > 0 \Rightarrow \text{sentido de la corriente inducida el mismo que el de } C \\ \varepsilon < 0 &\Rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} < 0 \Rightarrow \text{sentido de la corriente inducida contrario al de } C \end{aligned} \right.$$

- Criterio físico (ley de Lenz) para calcular el signo de la corriente inducida:

*Ejemplo: tengo un campo saliendo del papel que aumenta con el tiempo. Por ello, el flujo magnético (saliendo) a través de C aumenta con el tiempo:*

$\vec{B}$  (saliendo) y  $dB/dt > 0$

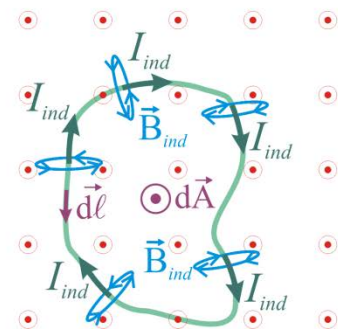


¡Cada vez hay más flujo magnético saliendo del papel! Por la ley de Lenz, la corriente inducida tratará de disminuir este flujo saliente.

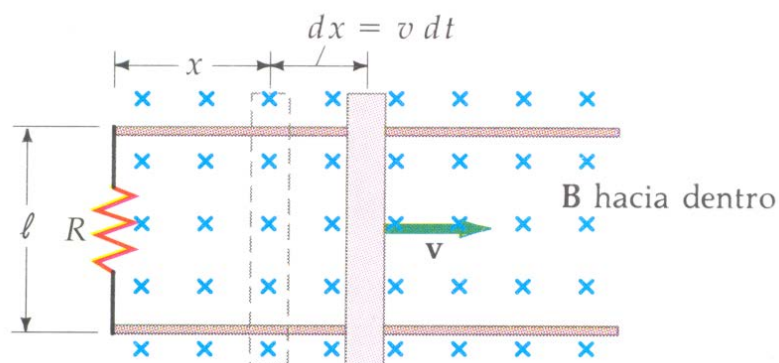


¡La corriente inducida tiene un sentido tal que crea un campo magnético inducido que mete líneas de campo en el papel, tratando de disminuir el flujo saliente!

$\vec{B}$  (saliendo) y  $dB/dt > 0$



- **Ejemplo: barra conductora que se desplaza entre 2 conductores:**





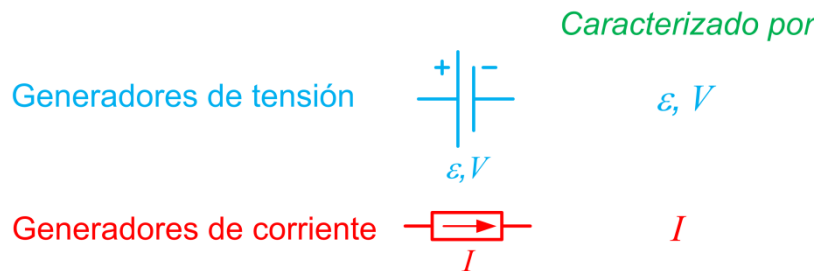
## 5. Circuitos eléctricos de corriente continua

Circuito eléctrico: “sistema que está compuesto de diversos elementos (activos y pasivos) unidos por conductores”.

### 5.1 Elementos de un circuito

#### a) Activos:

Elementos que suministran energía. Transforman la energía en energía eléctrica.



#### b) Pasivos:

En los elementos de corriente continua, el único elemento pasivo son las resistencias, que disipan energía eléctrica.

- **Resistor/resistencia**

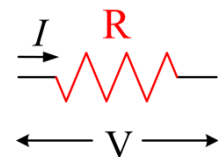
- **Parámetro característico:** resistencia  $R$ , expresada en ohmios ( $\Omega$ )

Se define como la relación entre el voltaje entre los extremos de una resistencia y la corriente que circula por ella.

- **Relación entre  $V$  e  $I$ :** Ley de Ohm  $V = I \cdot R$

- **Potencia consumida (disipada en forma de calor):**

$$P = VI = \frac{V^2}{R} \Rightarrow P = I^2 R \text{ (Ley de Joule)}$$



## 5.2 Asociación de elementos

### Asociación de resistencias/resistores

#### Serie

- La corriente que circula por todas las resistencias es la misma:

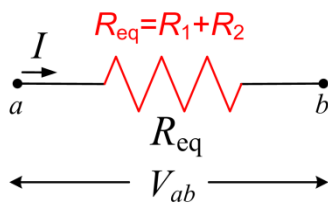
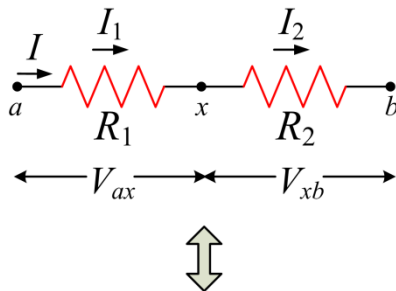
$$I = I_1 = I_2$$

- La diferencia de potencial es la suma de la diferencia de potencial en cada resistencia individual:

$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xb}$$

- La resistencia equivalente:

$$R_{eq} = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{V_{ax} + V_{xb}}{I} = \frac{V_{ax}}{I_1} + \frac{V_{xb}}{I_2} = R_1 + R_2$$



#### Paralelo

- La corriente que circula por la resistencia equivalente es la suma de las corrientes que circulan por cada resistencia individual:

$$I = I_1 + I_2$$

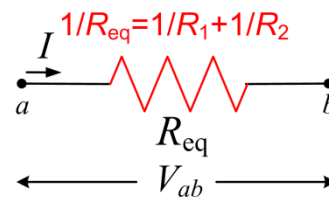
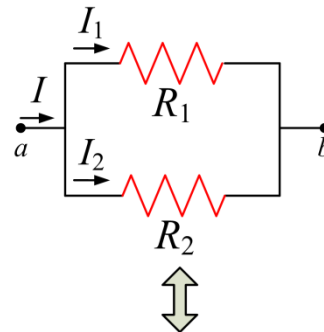
- Todos las resistencias se encuentran a la misma diferencia de potencial  $V_{ab}$

- La resistencia equivalente:

$$R_{eq} = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{V_{ab}}{I_1 + I_2}$$

⇓

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{I_1 + I_2}{V_{ab}} = \frac{I_1}{V_{ab}} + \frac{I_2}{V_{ab}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



### 5.3 Resolución de circuitos: Leyes de Kirchhoff

Se obtienen por aproximación a la teoría electromagnética: válidas bajo la aproximación cuasiestacionaria

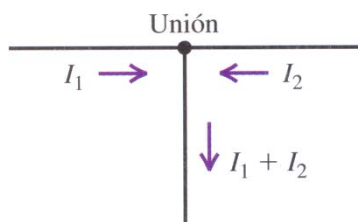
Definimos en un circuito:

- **Nodo:** punto en el que se encuentran tres o más conductores. También se conocen como uniones o puntos de rama.
- **Malla:** cualquier trayectoria cerrada.

a) **Regla de Kirchhoff de los nodos/uniones:** "La suma de las corrientes que entran en un nodo es cero"

$$\sum I = 0 \text{ (regla de los nodos, válida para cualquier nodo)}$$

a) Regla de Kirchhoff de las uniones



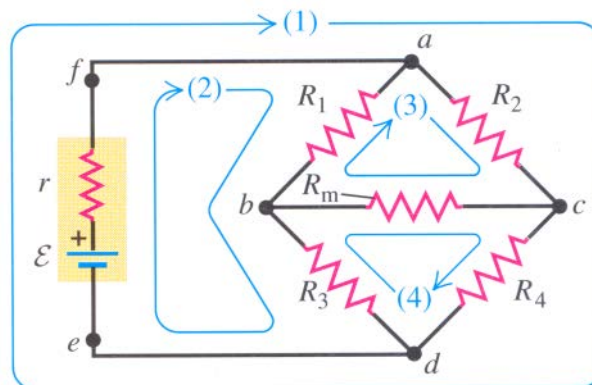
b) Analogía de la tubería de agua para la regla de Kirchhoff de las uniones



- Convenio de signos:
- $I > 0$  si  $I$  entra (llega al nodo)
  - $I < 0$  si  $I$  sale del nodo

b) **Regla de Kirchhoff de las mallas:** "La suma algebraica de las diferencias de potencial en cualquier trayectoria cerrada, incluyendo las asociadas con fuentes de f.e.m y elementos de resistencia debe ser cero"

$$\sum V = 0 \text{ (regla de las mallas, válida para cualquier malla)}$$

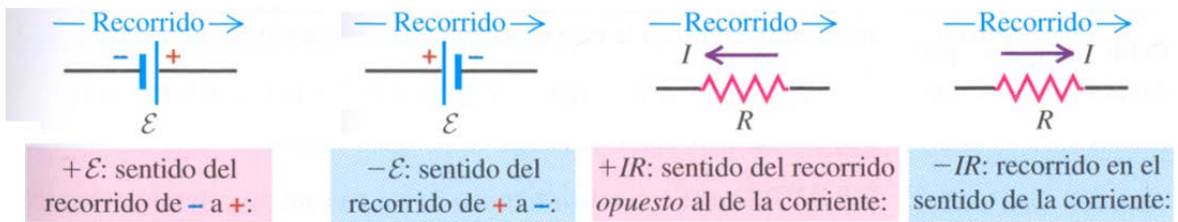


Convenio de signos:

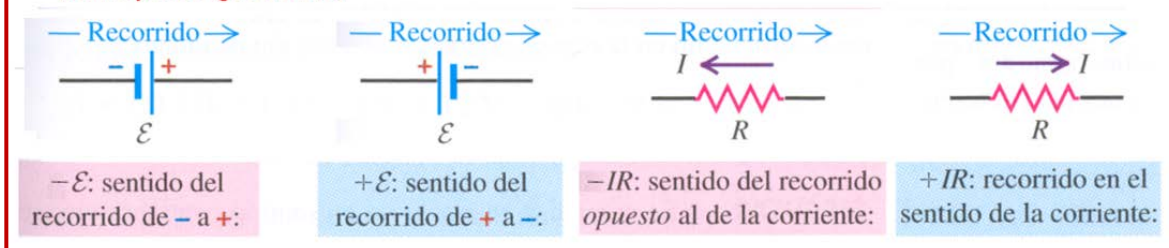
a) Convenciones de signo para las fem

b) Convenciones de signo para los resistores

**Criterio de signos de Sears-Zemansky: se calcula el incremento de potencial en el recorrido**



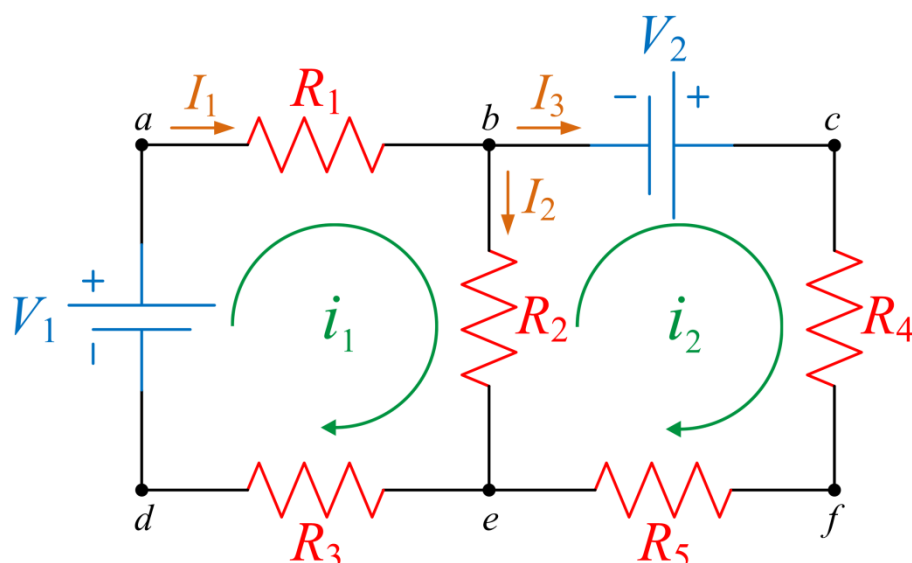
**Sin embargo, el criterio de signos más convencional es justo el opuesto, ya que calcula la caída/disminución de potencial a lo largo del recorrido. Al final dará igual porque será una suma que se igualará a 0.**



**Procedimiento**

1. Se asignan corrientes de malla  $i_1, i_2, \dots, i_M$  escogiendo un sentido de recorrido (p. ej. sentido horario).
2. Escojo una malla y un sentido para recorrerla (p. ej. sentido horario) y aplico la regla de las mallas para obtener una ecuación.
3. Repito 2 hasta tener tantas ecuaciones como incógnitas (corrientes de malla).
4. Resuelvo el sistema y obtengo las corrientes de malla.
5. Las corrientes reales que pasan por cada elemento (corrientes de rama  $I_1, I_2, \dots, I_N$ ) se obtienen a través de las corrientes de malla.

## Ejemplo



1. Asigno corrientes de malla  $i_1$  e  $i_2$ . El sentido es completamente arbitrario, pero hay que establecer uno: yo establezco el sentido horario como se muestra en el dibujo.
2. Puesto que tengo dos incógnitas (2 corrientes de malla), necesito dos mallas distintas a las que aplicar la ley de las mallas. Escojo:

- Malla 1: malla *abeda*
- Malla 2: malla *bcfeb*

Nótese que, al definir las mallas, también les impongo un sentido de recorrido (en este caso sentido horario, aunque también es completamente arbitrario y no tiene porqué coincidir con el de las corrientes de malla)

3. Ahora aplico la regla de las mallas a cada una de las mallas que tengo (en este paso debo usar el convenio de signos de la página anterior) para obtener un sistema de ecuaciones:

$$\text{Malla 1: } 0 = V_{aa} = V_{ab} + V_{be} + V_{ed} + V_{da} = +i_1 R_1 + i_1 R_2 - i_2 R_2 + i_1 R_3 - V_1$$

$$\text{Malla 2: } 0 = V_{bb} = V_{bc} + V_{cf} + V_{fe} + V_{eb} = -V_2 + i_2 R_4 + i_2 R_5 + i_2 R_2 - i_1 R_2$$

⇓

$$\begin{cases} 0 = -i_1 (R_1 + R_2 + R_3) + i_2 R_2 + V_1 \\ 0 = -i_2 (R_4 + R_5 + R_2) + i_1 R_2 + V_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = i_1 (R_1 + R_2 + R_3) - i_2 R_2 \\ V_2 = -i_1 R_2 + i_2 (R_4 + R_5 + R_2) \end{cases}$$

Nota: se podría llegar directamente a este resultado utilizando el método de las mallas:

$$\sum_k V_k = \sum_i i_i \left( \sum_j R_j \right)$$

4. Resuelvo el sistema de ecuaciones (por cualquier método) y obtengo las corrientes de malla. Conocidas las corrientes de malla puedo conocer fácilmente:
- a) *Las corrientes reales que circulan por cada elemento del circuito:* para ello solo tengo que combinar las corrientes de rama de forma apropiada. Así, las corrientes reales  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  (también llamadas *corrientes de rama*) que circulan por cada uno de los elementos del circuito son:

$$\begin{aligned} I_1 &= i_1 && \text{(circula por } V_1, R_1 \text{ y } R_3) \\ I_2 &= i_1 - i_2 && \text{(circula por } R_2) \\ I_3 &= i_2 && \text{(circula por } V_2, R_4 \text{ y } R_5) \end{aligned}$$

*Si alguno de estos valores fuese negativo, indicaría que el sentido real de la corriente es opuesto al indicado en el dibujo.*

- b) La diferencia de potencial entre 2 puntos cualesquiera del circuito: para ello solo tengo que recorrer un camino entre dos puntos usando el convenio de signos indicado (el procedimiento es el mismo que el aplicado para la ley de las mallas pero en vez de coger una malla –un camino que comienza y termina en el mismo punto– escogemos el camino indicado)

Por ejemplo, para calcular la caída de potencial entre los puntos  $a$  y  $c$  (si usase el criterio del Sears estaría calculando la diferencia/incremento de potencial) tengo multitud de caminos (evidentemente, el resultado será el mismo en todos los casos):

$$V_{ac} = V_a - V_c \left\{ \begin{array}{l} \text{Camino } abc : V_{ac} = V_{ab} + V_{bc} = +i_1 R_1 - V_2 \\ \text{Camino } adefc : V_{ac} = V_{ad} + V_{de} + V_{ef} + V_{fc} = +V_1 - i_1 R_3 - i_2 R_5 - i_2 R_4 \\ \text{Camino } abefc : V_{ac} = V_{ab} + V_{be} + V_{ef} + V_{fc} = +i_1 R_1 + i_1 R_2 - i_2 R_2 - i_2 R_5 - i_2 R_4 \\ \dots \end{array} \right.$$

## 6. Las leyes del campo electromagnético

### 6.1 Generalización de la ley de Ampère. La corriente de desplazamiento

Hasta ahora tenemos:

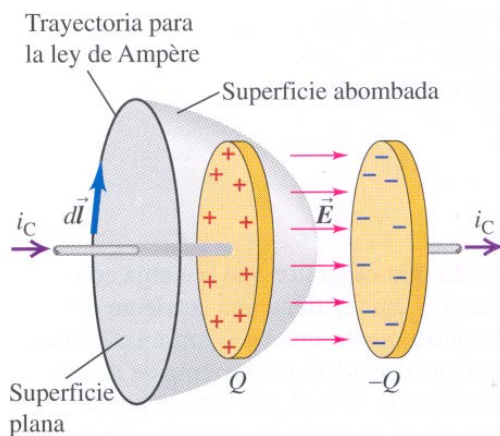
$$\text{Forma diferencial: } \begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(Ley de Faraday)} \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{(Ley de Gauss para } \vec{E}) \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & \text{(Ley de Gauss para } \vec{B}) \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} & \text{(Ley de Ampère)} \end{cases}$$

Vamos a demostrar que la Ley de Ampère no está completa. En forma integral:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = \mu_0 I_{C,enc}$$

Aplicamos la ley de Ampère a la misma trayectoria  $C$ , pero consideraremos 2 superficies distintas limitadas por ésta:

Consideramos el proceso de carga de un condensador plano



*Superficie plana:* la corriente que atraviesa la superficie plana es la corriente de conducción  $i_C$  por lo que  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_{plana}} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \mu_0 i_C$

*Superficie abombada:* puesto que por esa superficie no pasa el conductor, no puede haber ninguna corriente de conducción ( $\vec{J} = 0, I_{enc} = 0$ ) por lo que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_{abombada}} \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$$

¡Como  $C$  es la misma, el resultado debería ser el mismo!

De la definición de capacidad, la carga de las placas del condensador viene dada por  $Q=CV$ :

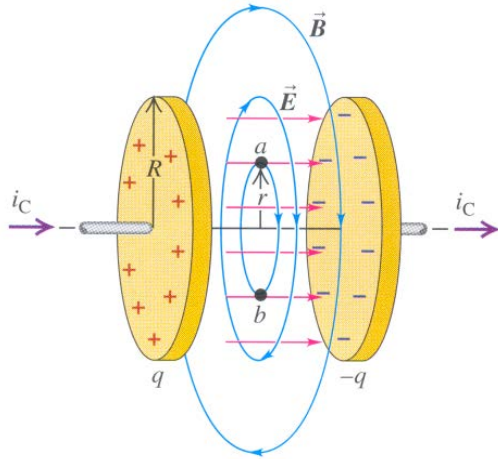
$$Q = \underbrace{C}_{\epsilon_0 \frac{A}{d}} \underbrace{V}_{E d} = \epsilon_0 \frac{A}{d} E d = \epsilon_0 E A \Rightarrow i_C = \frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 A \frac{\partial E}{\partial t}$$

Inventamos una densidad de corriente de desplazamiento  $i_D$  entre las placas que es igual a la corriente de conducción  $i_C$ :

$$i_D = \epsilon_0 A \frac{\partial E}{\partial t} \quad \text{(corriente de desplazamiento)}$$

Dividiendo la corriente por el área tenemos la densidad de corriente de desplazamiento  $J_D = i_D/A$ :

$$\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{densidad de corriente de desplazamiento})$$



- Un condensador que se carga con una corriente  $i_C$  tiene una corriente de desplazamiento igual a  $i_C$  entre las placas, con una densidad de corriente de desplazamiento  $\vec{J}_D = \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ . Ésta se puede considerar como una fuente de campo magnético entre las placas.
- La *corriente de desplazamiento* no es una corriente de conducción de carga eléctrica: es la *respuesta de un material dieléctrico ante un campo eléctrico variante* (es la única corriente que puede existir en un dieléctrico perfecto).
- Es una *fuerza de campo magnético*.

**Aplicado a la Ley de Ampère queda:**

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \underbrace{\int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}}_{I_{C,enc}} + \mu_0 \underbrace{\int_S \vec{J}_D \cdot d\vec{A}}_{I_{D,enc}} \Leftrightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{J}_D, \text{ donde } \vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

o también:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \underbrace{\int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}}_{I_{C,enc}} + \mu_0 \epsilon_0 \underbrace{\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A}}_{I_{D,enc}} \Leftrightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\vec{J}_D} \quad (\text{Ley de Ampère-Maxwell})$$

**Ejemplo de aplicación para el cálculo del campo magnético entre las placas del condensador en proceso de carga:**

Entre las placas no hay conductor, por lo que  $I_{C,enc} = 0$ , solo existe  $I_{D,enc}$  por lo que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cancel{I_{C,enc}} + \mu_0 I_{D,enc}$$

Cogiendo una circunferencia de radio  $r$ :

$$\left. \begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &\equiv \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \equiv B \oint_C dl = B 2\pi r \\ I_{D,enc} = J_D A_{D,enc} &= \frac{i_D}{R^2} \underbrace{\cancel{\pi} r^2}_{A_{D,enc}} \equiv \frac{i_C r^2}{R^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R^2} i_C$$

**La ecuación de conservación de la carga: ecuación de continuidad**

Aplicando la divergencia a ambos miembros de  $\nabla \times \vec{B}$ :

$$\underbrace{\nabla(\nabla \times \vec{B})}_{\text{divergencia de un rotacional}=0} = \nabla \left( \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \nabla(\mu_0 \vec{J}) + \nabla \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \stackrel{\mu_0, \epsilon_0 = \text{cte}}{\downarrow} \mu_0 \nabla \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\nabla \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\nabla \vec{E})}_{\frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ por Gauss}} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \mu_0 \nabla \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 &\Rightarrow \cancel{\mu_0} \nabla \vec{J} + \cancel{\mu_0} \cancel{\epsilon_0} \frac{1}{\cancel{\epsilon_0}} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ &\Downarrow \\ \nabla \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \text{ (Ecuación de continuidad)} \end{aligned}$$

## 6.2 Las ecuaciones de Maxwell

$$\text{Forma diferencial: } \begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(Ley de Faraday)} \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{(Ley de Gauss para } \vec{E} \text{)} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & \text{(Ley de Gauss para } \vec{B} \text{)} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\vec{J}_D} & \text{(Ley de Ampère-Maxwell)} \end{cases}$$

A las que añadimos:  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  Fuerza de Lorentz

### Propiedades:

- Existe una gran simetría en las 4 ecuaciones: en el vacío ( $\Leftrightarrow \rho = 0$  y  $\vec{J} = 0$ ) las de la divergencia son idénticas ( $\nabla \cdot \vec{E} = 0, \nabla \cdot \vec{B} = 0$ ) y las del rotacional muy similares

$$\left( \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

- Los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  están acoplados, por lo que no son independientes: ya no se habla de campo eléctrico o magnético, sino de campo electromagnético (EM). Cualquier clase de campo variable en el tiempo  $\vec{E}$  o  $\vec{B}$  induce un campo del otro tipo en regiones vecinas.

- Predicen la existencia las ondas electromagnéticas: *perturbaciones electromagnéticas que consisten en campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  variables con el tiempo que se propagan desde una región a otra, incluso en el vacío.* Las ondas electromagnéticas, producidas por cargas aceleradas, se propagan en el vacío a velocidad  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$

$$\text{Forma integral: } \begin{cases} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} & \text{(Ley de Faraday)} \\ \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV & \text{(Ley de Gauss para } \vec{E} \text{)} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 & \text{(Ley de Gauss para } \vec{B} \text{)} \\ \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underbrace{\mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}}_{I_{C,enc}} + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A}}_{I_{D,enc}} & \text{(Ley de Ampère-Maxwell)} \end{cases}$$

### 6.3 Ecuaciones de propagación de los campos: la ecuación de onda

Partimos de las ecuaciones de Maxwell (forma diferencial) en el vacío ( $\Leftrightarrow \rho = 0$  y  $\vec{J} = 0$ )

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (1) \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 & (2) \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & (3) \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (4) \end{cases}$$

#### Ecuación de onda para $\vec{E}$

Aplicamos el rotacional a ambos miembros de (1):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

Usamos la siguiente identidad vectorial  $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$  al campo  $\vec{E}$ :

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \left( \underbrace{\nabla \cdot \vec{E}}_{\text{Por ec. (2)}} \right) - \nabla^2 \vec{E} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E} \quad (5)$$

Por otro lado, intercambiando el orden de diferenciación (el rotacional y la derivada parcial) y aplicando la ec. 4:

$$\nabla \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \underbrace{\nabla \times \vec{B}}_{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow \nabla \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (6)$$

Igualando (5) y (6) obtenemos:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{Ecuación de onda para } \vec{E})$$

Comparando con la ecuación de onda  $\nabla^2 \vec{\phi} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\phi}}{\partial t^2} = 0$ , tenemos que

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0 \epsilon_0 \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c \quad \text{Velocidad en el vacío}$$

Si no es el vacío:  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \leq c$

En coordenadas cartesianas, el operador laplaciano:  $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

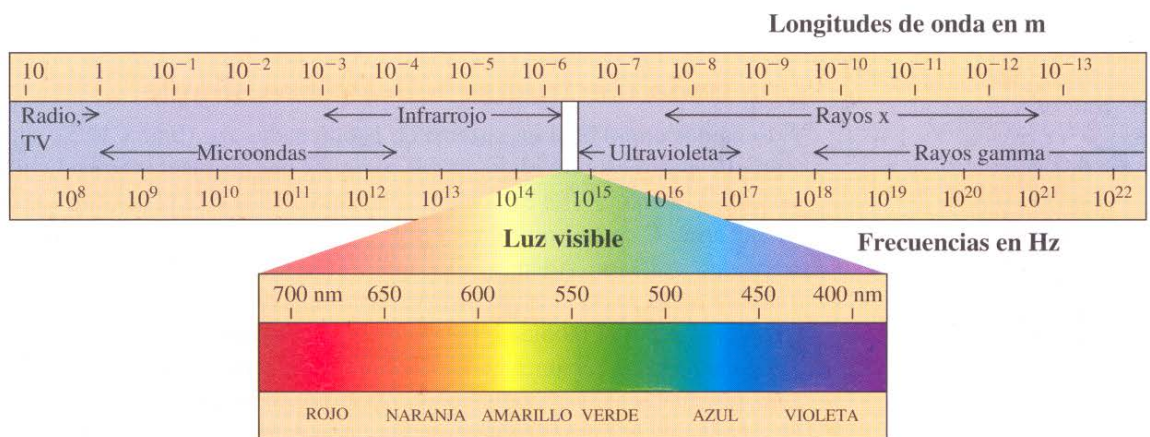
**Ecuación de onda para  $\vec{B}$**

Aplicando el rotacional a ambos miembros de (4) y, de la misma forma que antes, obtenemos:

$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$  (Ecuación de onda para  $\vec{B}$ )

**6.4 Espectro electromagnético**

**32.4** El espectro electromagnético. Las frecuencias y longitudes de onda que se encuentran en la naturaleza se extienden en un intervalo tan amplio que se tiene que usar una escala logarítmica para indicar todas las bandas importantes. Las fronteras entre las bandas son un tanto arbitrarias.



## 7. Circuitos eléctricos de corriente alterna

*Circuito eléctrico: "sistema que está compuesto de diversos elementos (activos y pasivos) unidos por conductores."*

### 7.1 Elementos de un circuito de corriente alterna

#### a) Activos:

Elementos que suministran energía. Transforman la energía en energía eléctrica.

Caracterizado por

Generadores de tensión



$$A, \omega, \alpha \rightarrow V = A \sin(\omega t + \alpha)$$

Generadores de corriente



$$I_0, \omega, \alpha \rightarrow I = I_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

#### b) Pasivos:

Elementos que disipan o almacenan energía eléctrica.

##### • Resistor/resistencia

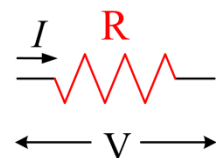
- **Parámetro característico:** resistencia  $R$ , expresada en ohmios ( $\Omega$ )

Se define como la relación entre el voltaje entre los extremos de una resistencia y la corriente que circula por ella.

- **Relación entre  $V$  e  $I$ :** Ley de Ohm  $V = I \cdot R$

- **Potencia consumida (disipada en forma de calor):**

$$P = VI = \frac{V^2}{R} \Rightarrow P = I^2 R \text{ (Ley de Joule)}$$



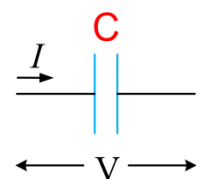
##### • Condensador/capacitor

- **Parámetro característico:** capacidad  $C$  y se mide en faradios (F)

Se define como la relación entre la carga que adquiere un condensador y el voltaje al que se le aplica:  $C = \frac{Q}{V}$

- **Relación entre  $V$  e  $I$ :**

De la definición de  $C$ , podemos poner  $V = \frac{Q}{C}$



Para poner  $Q$  en función de la corriente, uso la definición de  $I$ :

$$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow Q = \int Idt$$

Sustituyendo en la expresión de  $V$ :

$$V = \frac{1}{C} \int Idt \quad \text{Relación entre } V \text{ e } I \text{ para un condensador}$$

**Caso particular: fuentes armónicas**  $V, I \propto e^{j\omega t}$

Si la dependencia en  $t$  es armónica, esto es, si  $I = I_0 e^{j\omega t}$  entonces:

$$\int Idt = \int I_0 e^{j\omega t} dt = I_0 \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega} I$$

Por lo que, sustituyendo en la relación entre  $V$  e  $I$ , queda:

$$V = \frac{1}{j\omega C} I \quad \text{Relación entre } V \text{ e } I \text{ en un condensador para fuentes armónicas}$$

*Al ser compleja la relación entre  $V$  e  $I$ , éstos no están en fase: de hecho la diferencia de fase entre  $V$  e  $I$  es de  $-90$  grados, por lo que la corriente en un condensador va adelantada  $90^\circ$  con respecto al voltaje que la genera.*

Se define la **impedancia  $Z$**  de cualquier elemento de un circuito, como el cociente entre el voltaje entre los terminales de dicho elemento y la corriente que circula por éste:

$$Z := \frac{V}{I} = R + jX \quad R \text{ y } X \text{ resistencia y reactancia del elemento, respectivamente}$$

Para un resistor, la impedancia es real pura e igual a su resistencia, sin embargo, **para un condensador**, ésta es imaginaria pura:

$$Z_C = \frac{V}{I} = \frac{\frac{1}{j\omega C} I}{I} = \frac{1}{j\omega C} = j \frac{-1}{\omega C} = R_C + jX_C \Rightarrow R_C = 0, X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

#### - **Energía almacenada (eléctrica):**

La energía que almacena un condensador cargado es la misma que el trabajo necesario para establecer la carga en dicho dispositivo.

El trabajo necesario para establecer una carga  $dQ$  se calcula a través de la definición de energía potencial  $\Rightarrow dU = VdQ$

Integrando calculo el trabajo total cuando la carga pasa de  $0 \rightarrow Q$ :

$$U = \int dU = \int_0^Q VdQ \underset{V=\frac{Q}{C}}{=} \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2$$

Por lo que la energía almacenada en un condensador es:  $U_c = \frac{1}{2} CV^2$

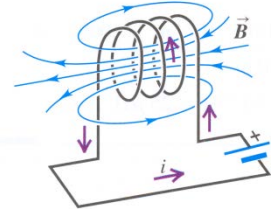
• **Inductor/Bobina/Autoinducción**

- **Parámetro característico: autoinductancia  $L$**  y se mide en henrios (1 H=1 Wb/A)

Se define como la relación entre el flujo que atraviesa la

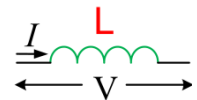
bobina y la corriente que pasa por ésta:  $L = \frac{\phi}{I}$

**Autoinductancia:** si la corriente  $i$  en la bobina está cambiando, el flujo cambiante a través de ésta induce una fem en la bobina.



- **Relación entre  $V$  e  $I$ :**

Por la ley de Faraday, el voltaje está relacionado con la variación del flujo en la bobina:



$$V = \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{obviamos el signo } - \text{ porque medimos } V \text{ en sentido contrario a la corriente})$$

De la definición de  $L$  tenemos que  $\phi = L \cdot I$ , por lo que sustituyendo en la expresión anterior:

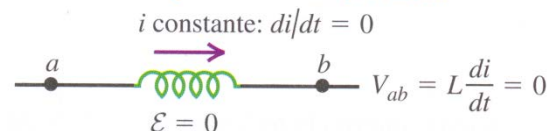
$$V = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d(LI)}{dt} \underset{L=\text{cte}}{=} L \frac{dI}{dt} \Rightarrow V = L \frac{dI}{dt} \quad \text{Relación entre } V \text{ e } I \text{ para un inductor}$$

**a) La diferencia de potencial a través de un resistor depende de la corriente. B), c) y d) La diferencia de potencial a través de un inductor depende de la tasa de cambio de la corriente.**

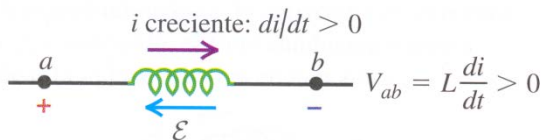
- a) Resistor con corriente  $i$  que fluye de  $a$  a  $b$ : el potencial disminuye de  $a$  a  $b$ .



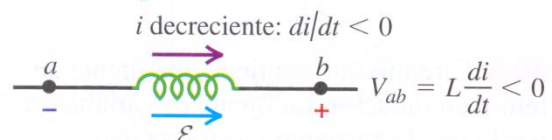
- b) Inductor con corriente *constante*  $i$  que fluye de  $a$  a  $b$ : no hay diferencia de potencial.



- c) Inductor con corriente  $i$  *creciente* que fluye de  $a$  a  $b$ : el potencial disminuye de  $a$  a  $b$ .



- d) Inductor con corriente  $i$  *decreciente* que fluye de  $a$  a  $b$ : el potencial se incrementa de  $a$  a  $b$ .



### Caso particular: fuentes armónicas $V, I \propto e^{j\omega t}$

Si la dependencia en  $t$  es armónica, esto es, si  $I = I_0 e^{j\omega t}$  entonces:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d(I_0 e^{j\omega t})}{dt} = I_0 j\omega e^{j\omega t} = j\omega I$$

Por lo que, sustituyendo en la relación entre  $V$  e  $I$ , queda:

$$V = j\omega LI \quad \text{Relación entre } V \text{ e } I \text{ en un inductor para fuentes armónicas}$$

*Como sucedía con el condensador, la relación entre  $V$  e  $I$  es también compleja, por lo que  $V$  e  $I$  no están en fase. En este caso la diferencia de fase entre  $V$  e  $I$  es de 90 grados, por lo que la corriente en una inductancia va retrasada  $90^\circ$  con respecto al voltaje que la genera.*

La impedancia en este caso también es imaginaria pura:

$$Z_L = \frac{V}{I} = \frac{j\omega LI}{I} = j\omega L = R_L + jX_L \Rightarrow R_L = 0, X_L = \omega L$$

#### - **Energía almacenada (magnética):**

La energía que almacena una bobina por la que circula una corriente  $I$  es la misma que el trabajo necesario para establecer dicha corriente, o lo que es lo mismo, para conseguir que la corriente pase de 0 a  $I$  amperios.

La potencia instantánea viene dada por:  $P = VI = L \underbrace{\frac{dI}{dt}}_V I \Rightarrow P dt = LI dI$

Integrando la potencia, calculo el trabajo para establecer la corriente  $I$ :

$$U = \int P dt = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2$$

Por lo que la energía almacenada en una bobina es:  $U_L = \frac{1}{2} LI^2$

#### **Consideraciones:**

- Un generador siempre suministra energía.
- Una resistencia siempre disipa energía.
- Un condensador: recibe energía del circuito cuando se está cargando ( $dQ/dt > 0$ ), mientras que suministra energía al circuito cuando se está descargando ( $dQ/dt < 0$ ).
- Un inductor: recibe energía del circuito cuando aumenta la corriente que lo atraviesa ( $dI/dt > 0$ ), mientras que suministra energía al circuito cuando disminuye dicha corriente ( $dI/dt < 0$ ).

## 7.2 Asociación de elementos

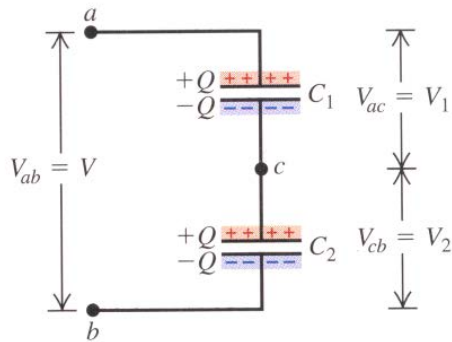
### Asociación de condensadores/capacitores

#### Serie

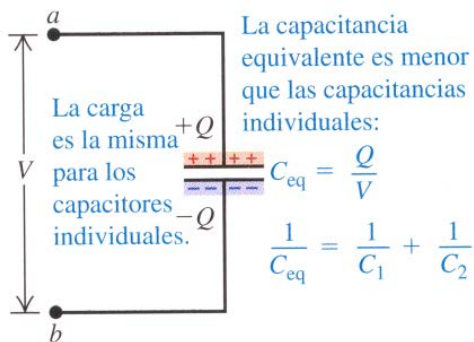
##### Capacitores en serie:

- Los capacitores tienen la misma carga  $Q$ .
- Sus diferencias de potencial se suman:

$$V_{ac} + V_{cb} = V_{ab}$$



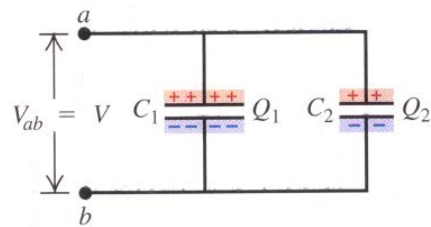
b) El capacitor equivalente único



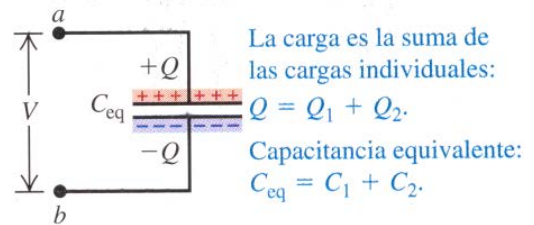
#### Paralelo

##### Capacitores en paralelo:

- Los capacitores tienen el mismo potencial  $V$ .
- La carga en cada capacitor depende de su capacitancia:  $Q_1 = C_1V$ ,  $Q_2 = C_2V$ .



b) El capacitor equivalente único



## Asociación de inductores/bobinas

### Serie

- La corriente es la misma:

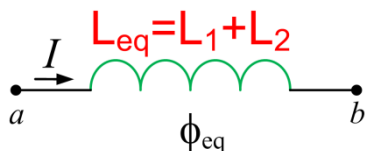
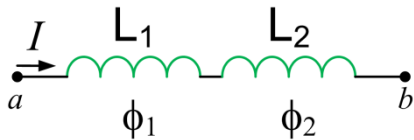
$$I = I_1 = I_2$$

- El flujo total es la suma de los flujos individuales:

$$\phi_{eq} = \phi_1 + \phi_2$$

- La autoinductancia equivalente:

$$L_{eq} = \frac{\phi_{eq}}{I} = \frac{\phi_1 + \phi_2}{I} = \underbrace{\frac{\phi_1}{I}}_{L_1} + \underbrace{\frac{\phi_2}{I}}_{L_2} = L_1 + L_2$$



### Paralelo

- La corriente es la suma de las corrientes individuales, mientras que el voltaje es el mismo:

$$I = I_1 + I_2, \quad V = V_1 = V_2$$

- Cogiendo la relación entre  $V$  e  $I$ , e integrando para despejar la corriente:

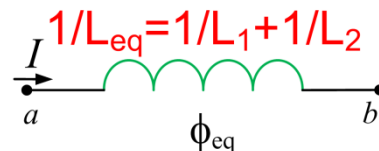
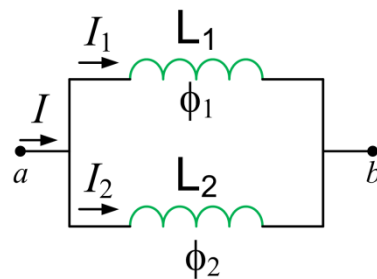
$$I_1 = \frac{1}{L_1} \int \underbrace{V_1}_{V} dt, \quad I_2 = \frac{1}{L_2} \int \underbrace{V_2}_{V} dt$$

- La autoinductancia equivalente:

$$I = \frac{1}{L_{eq}} \int V dt \Rightarrow \frac{1}{L_{eq}} = \frac{\overset{I_1+I_2}{\int V dt}}{\int V dt} = \frac{I_1 + I_2}{\int V dt} = \frac{\overset{\frac{1}{L_1} \int V dt}{I_1}}{\int V dt} + \frac{\overset{\frac{1}{L_2} \int V dt}{I_2}}{\int V dt}$$



$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} \frac{\int V dt}{\int V dt} + \frac{1}{L_2} \frac{\int V dt}{\int V dt} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$



**Caso general:**

Todo esto se simplifica si consideramos estos elementos (sean resistencias, condensadores, inductores o una combinación de varios) como impedancias. En tal caso, representamos cada uno de estos elementos como una impedancia del valor dado por  $Z_R=R$ ,  $Z_C=jX_C=-j/(\omega C)$  o  $Z_L=jX_L=j\omega L$ , cuya forma de asociación es idéntica a la de las resistencias:

**Asociación de impedancias**

**Serie**

- La corriente que circula por todos los elementos es la misma:

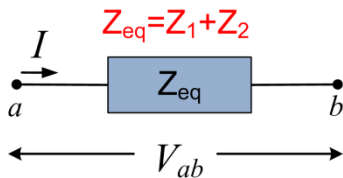
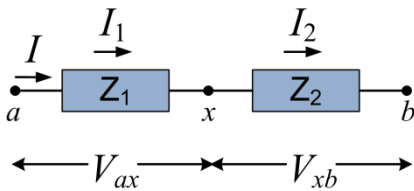
$$I = I_1 = I_2$$

- La diferencia de potencial es la suma de la diferencia de potencial en cada elemento individual:

$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xb}$$

- La impedancia equivalente:

$$Z_{eq} = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{V_{ax} + V_{xb}}{I} = \frac{V_{ax}}{I_1} + \frac{V_{xb}}{I_2} = Z_1 + Z_2$$



**Paralelo**

- La corriente que circula por el elemento equivalente es la suma de las corrientes que circulan por cada elemento individual:

$$I = I_1 + I_2$$

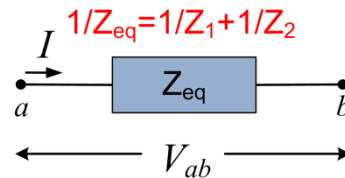
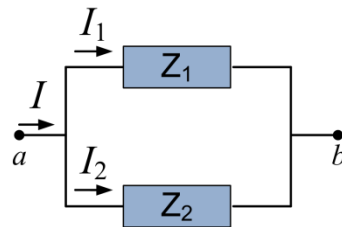
- Todos los elementos se encuentran a la misma diferencia de potencial  $V_{ab}$

- La impedancia equivalente:

$$Z_{eq} = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{V_{ab}}{I_1 + I_2}$$

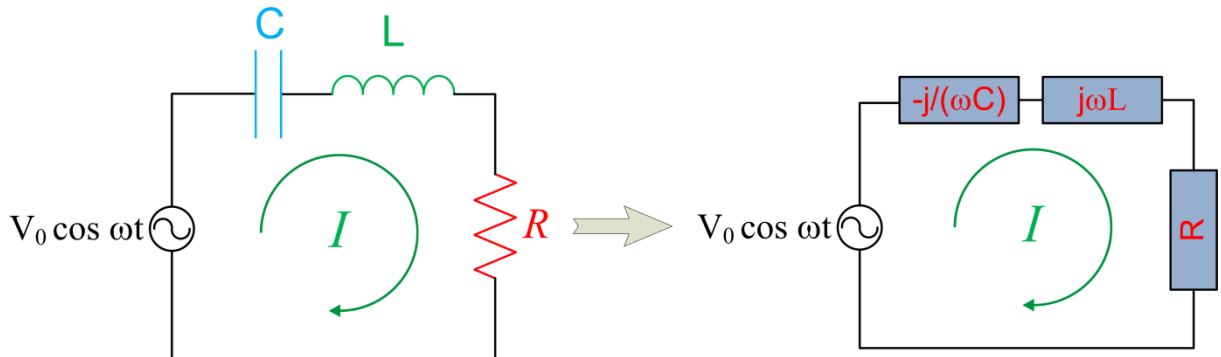


$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{I_1 + I_2}{V_{ab}} = \frac{I_1}{V_{ab}} + \frac{I_2}{V_{ab}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$



### 7.3 Circuito RLC serie con generador de corriente alterna en régimen permanente.

Tenemos un circuito RLC serie como el de la figura:



Puesto que la fuente es armónica (de frecuencia angular  $\omega$ ), puedo sustituir los condensadores

y los inductores por su impedancia equivalente:  $Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$  y  $Z_L = j\omega L$

Pongo el voltaje de entrada  $V_{in}$  como un fasor:  $V_{in} = \text{Re}(V_0 e^{j\omega t}) \Rightarrow V_{in} \equiv V_0 \underline{0}$

$$V_{in} = V_C + V_L + V_R = Z_C I + Z_L I + Z_R I = \underbrace{-\frac{jI}{\omega C}}_{V_C} + \underbrace{j\omega LI}_{V_L} + \underbrace{RI}_{V_R} = \left( -\frac{j}{\omega C} + j\omega L + R \right) I = \underbrace{\left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]}_{Z_{in}} I$$

Por lo que la corriente que pasa por el circuito es:

$$I = \frac{V_{in}}{Z_{in}} = \frac{V_{in}}{R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

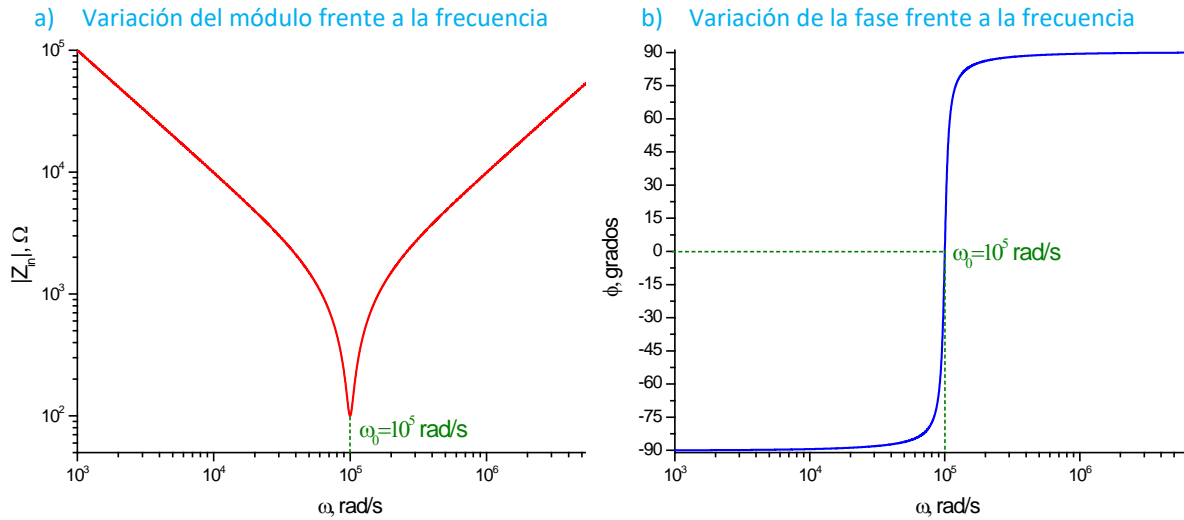
La impedancia total de entrada es la suma de las impedancias de cada uno de los elementos (están en serie):

$$Z_{in} = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = |Z_{in}| e^{j\phi} \Rightarrow \begin{cases} |Z_{in}| = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \\ \tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \end{cases}$$

### 7.3.1. Variación de la impedancia de entrada $Z_{in}$ con la frecuencia.

Nótese que tanto  $|Z_{in}|$  como  $\phi$  dependen de la frecuencia:

Variación de la impedancia de entrada con la frecuencia



Cuando  $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow |Z_{in}|$  mínimo y  $\phi$  cero

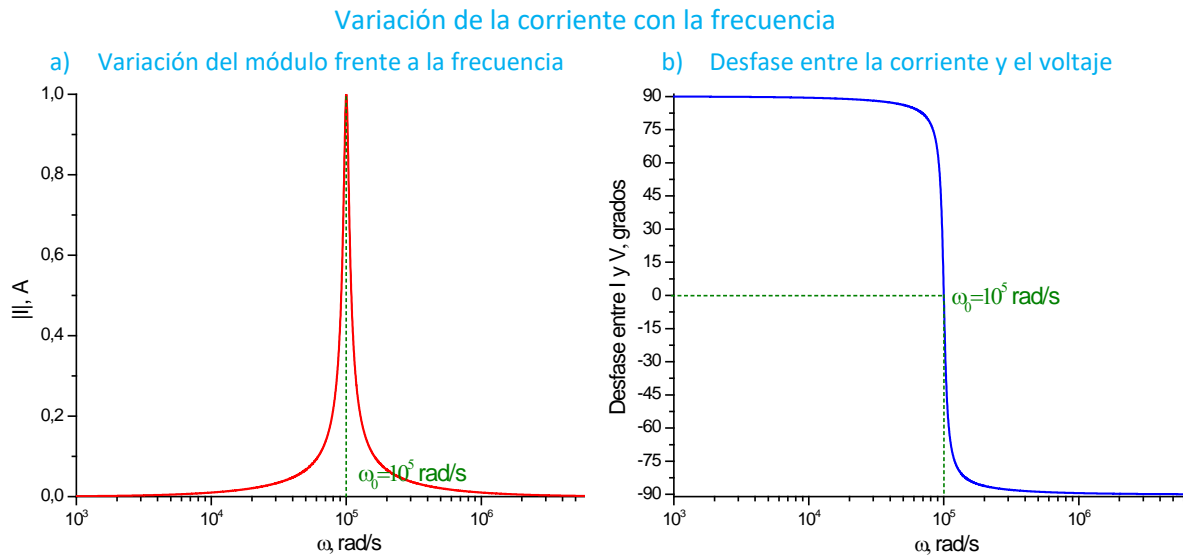
Llamamos a esta frecuencia, **frecuencia angular de resonancia del circuito**:  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

En el ejemplo de las figuras  $\omega_0 = 10^5$  rad/s. Se observa que a la frecuencia de resonancia, la impedancia de entrada tiene amplitud mínima y además es real pura (fase  $\phi = 0$ )

### 7.3.2. Variación de la corriente $I$ con la frecuencia.

Puesto que  $I(\omega) = \frac{V_{in}}{Z_{in}(\omega)} = \frac{V_{in}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$ , el comportamiento del circuito dependerá de la

frecuencia del voltaje de la señal de entrada ( $\omega$ ). Además puesto que la corriente es inversamente proporcional a la impedancia de entrada, su comportamiento es el de la  $Z_{in}$  invertido:



A la frecuencia de resonancia  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ :

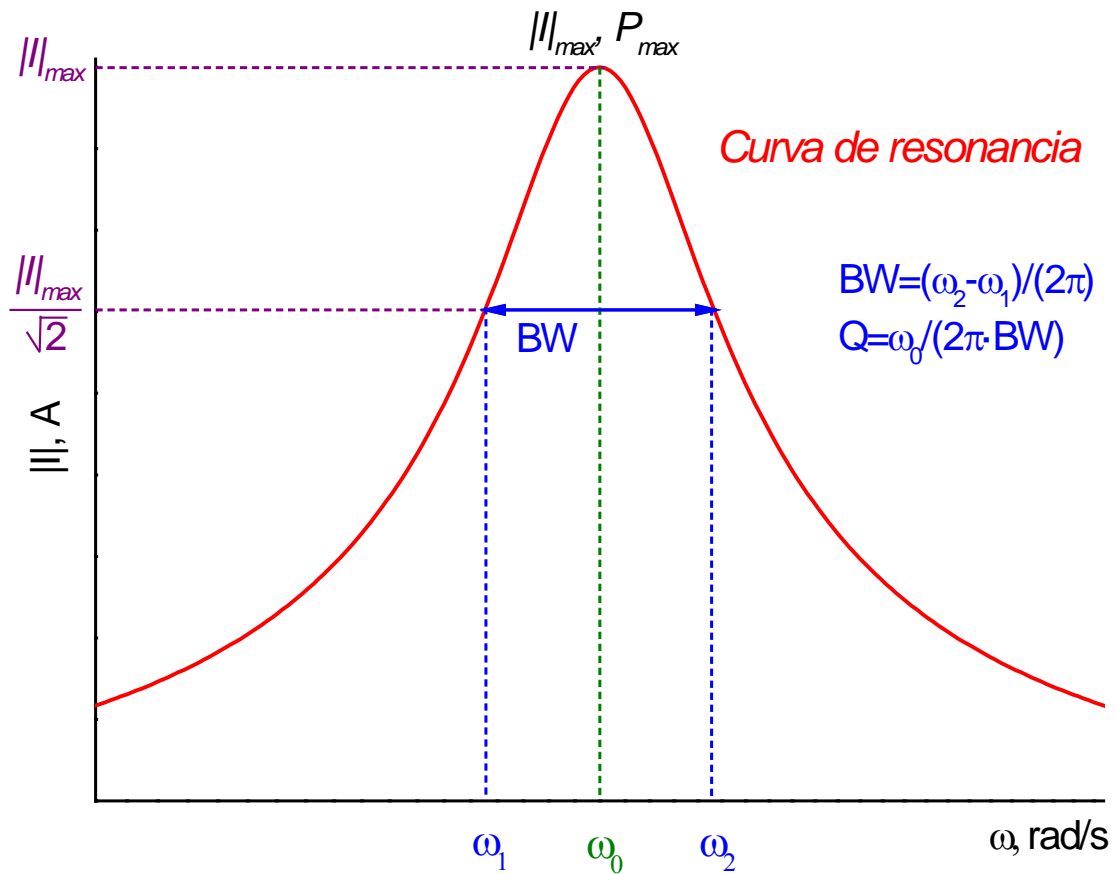
- La corriente que circula por el circuito es máxima  $\rightarrow$  en la condición de resonancia, la potencia transferida al circuito es máxima.
- La corriente está en fase con el voltaje.

Se define:

- BW ancho de banda del circuito o banda de paso (Hz): “rango de frecuencias en la cual la potencia transferida al circuito es como mínimo la mitad de la que se transfiere a la frecuencia de resonancia”.
- Q factor de calidad del circuito: es una medida de lo buena que es la resonancia en el circuito. Es inversamente proporcional al ancho de banda. Para el circuito RLC serie vale:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{2\pi B}$$

Cuanto más estrecha sea la curva de resonancia mayor es el factor de calidad  $Q$  y menor el ancho de banda  $BW$ .



Aplicaciones:

Se utilizan en *sintonizadores*. Si ponemos en la salida el voltaje en la resistencia ( $V_R$ ), el dispositivo funciona como un *filtro pasa-banda* (nótese que la curva de salida tendrá la forma de la curva de resonancia puesto que  $V_R = RI$ , esto es,  $V_R$  es directamente proporcional a  $I$ )